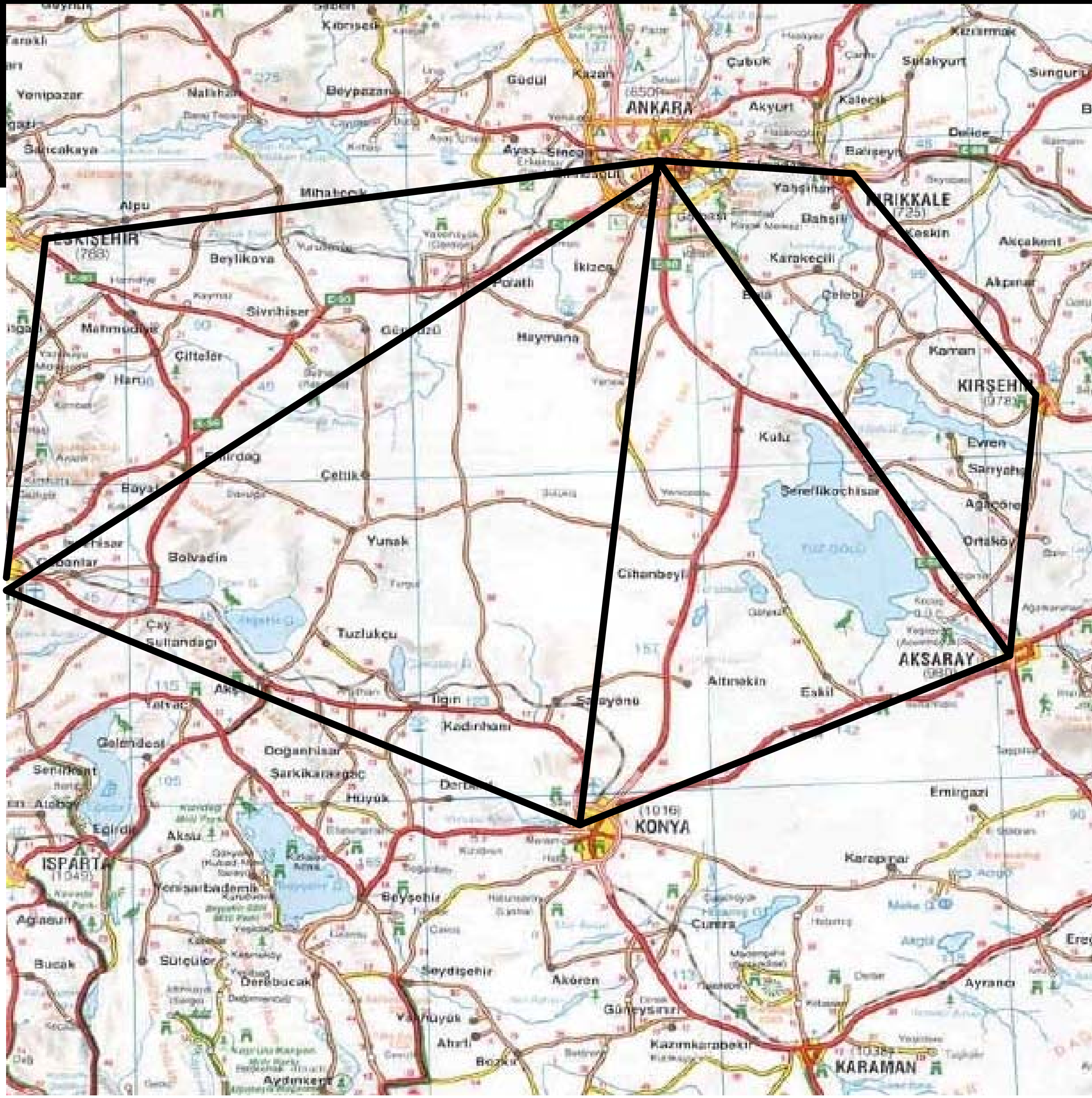
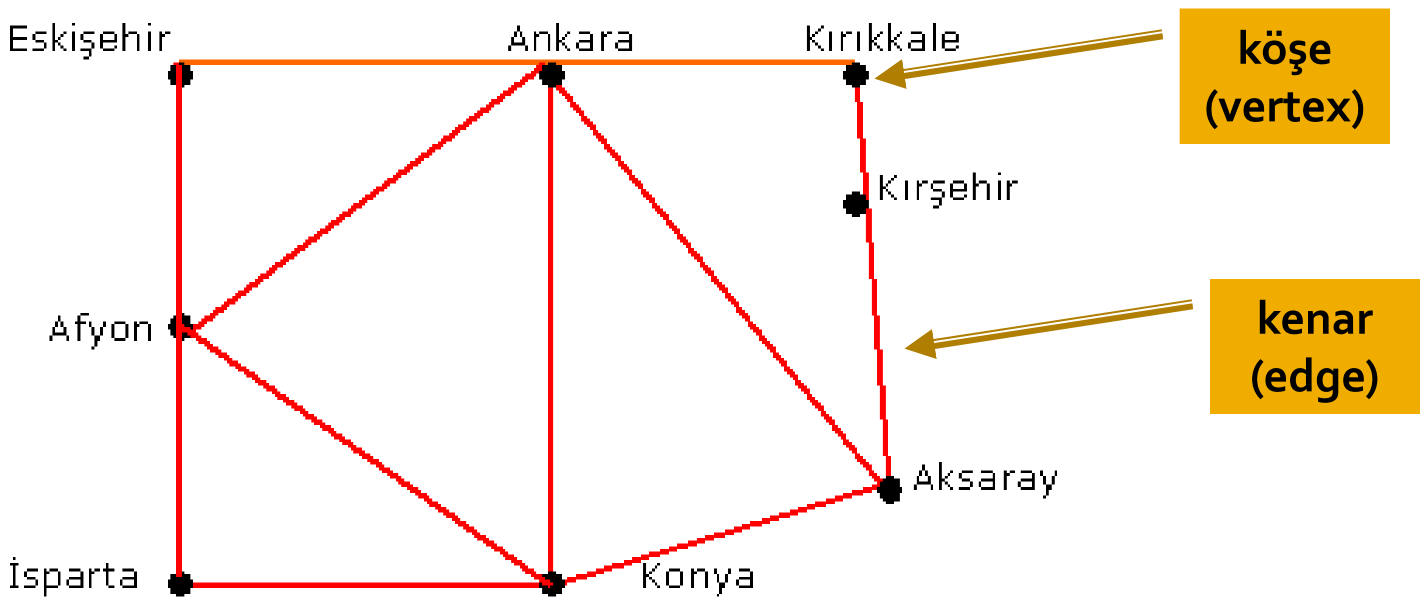
BÖLÜM 7

ÇİZGE KURAMI

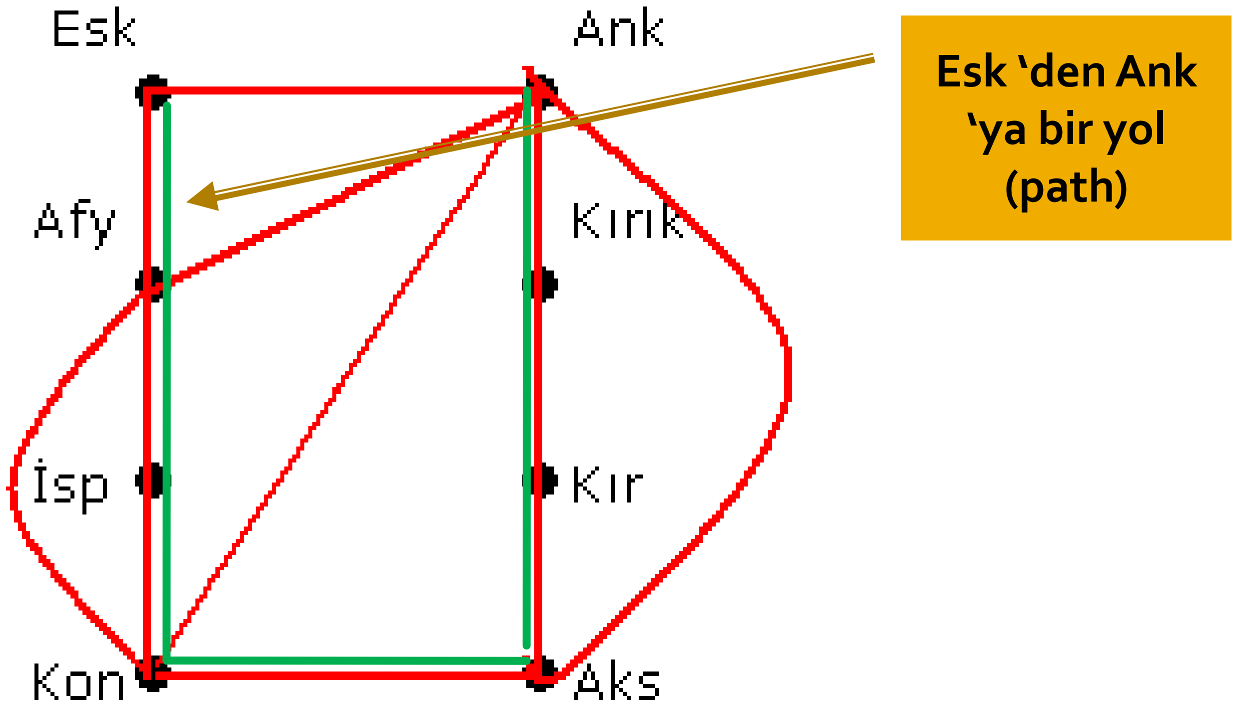


ANKARA
ESKIŞEHIR
KIRIKKALE
KIRŞEHIR
AKSARAY
KONYA
ISPARTA
KARAMAN
Polatlı
Haymana
Sivrihisar
Beypazarı
Kulu
Şereflikoçhisar
Tuz Gölü
Cihanbeyli
Yunak
Bolvadin
Emirdağ
Kadınhanı
Sarayönü
Beyşehir
Seydişehir
Çumra
Eğirdir
Ereğli

[redacted]


Eskişehir
Ankara
Kırıkkale
köşe
(vertex)
Kırşehir
Afyon
kenar
(edge)
Aksaray
İsparta
Konya

[redacted]



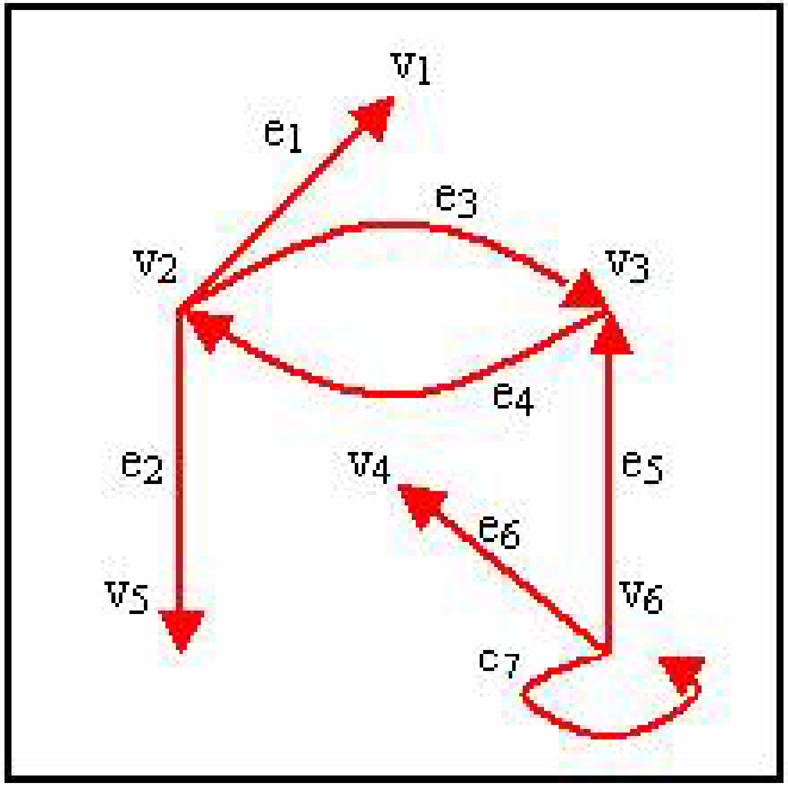
[redacted]

- **Tanım 7.1.1:** Bir G **çizgesi** (ya da **yönsüz çizgesi**) köşelerden oluşan bir V kümesinden ve kenarlardan oluşan bir E kümesinden oluşur. Herbir $e \in E$ kenarı iki v ve w köşesiyle ilişkilendirilir ve $e=(v,w)$ ya da $e=(w,v)$ yazılır.
- V köşeler kümesi ve E kenarlar kümesinden oluşan G **yönlü çizgesi** herbir $e \in E$ kenarı ile ilişkilendirilmiş köşelerin sıralı çiftinden oluşur.

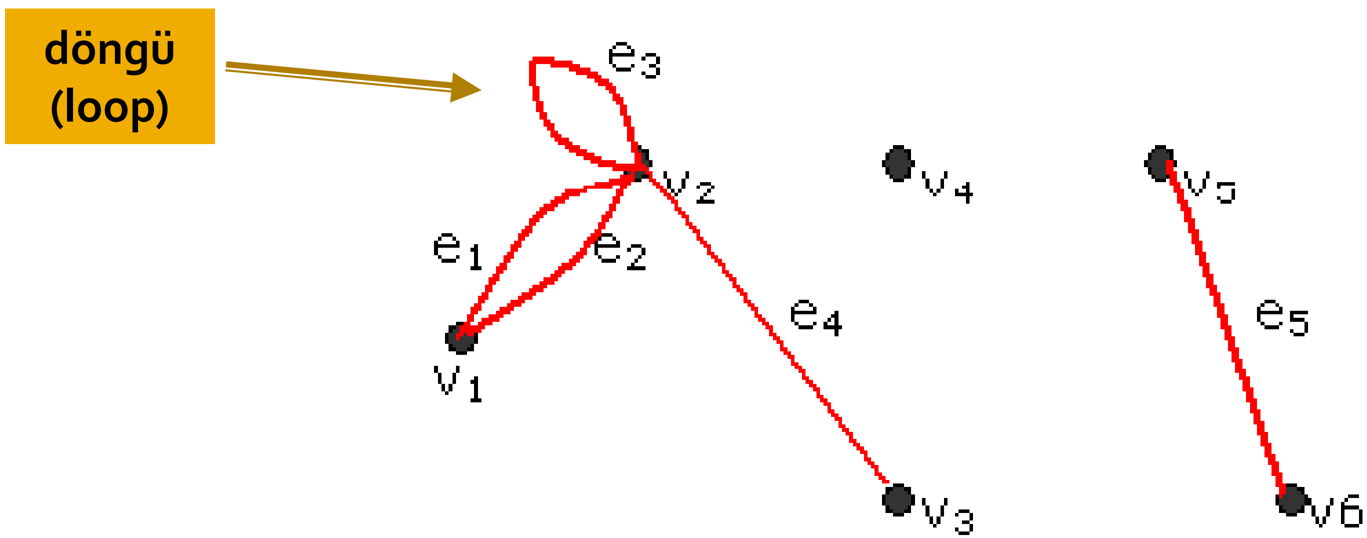
[redacted]

- İki v ve w köşesi ile ilişkilendirilmiş olan bir e kenarına, v ve w köşelerini **ayıran kenar**, v ve w köşelerine ise e kenarında **bitişen köşeler** denir.
- Eğer bir G çizgesi V köşeler ve E kenarlar kümesinden oluşmuş ise, G=(V,E) şeklinde yazılır.

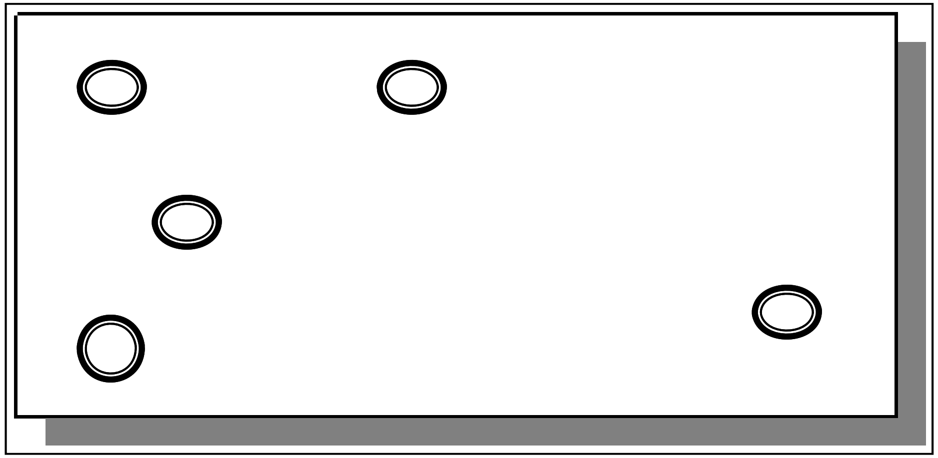
[redacted]



[redacted]

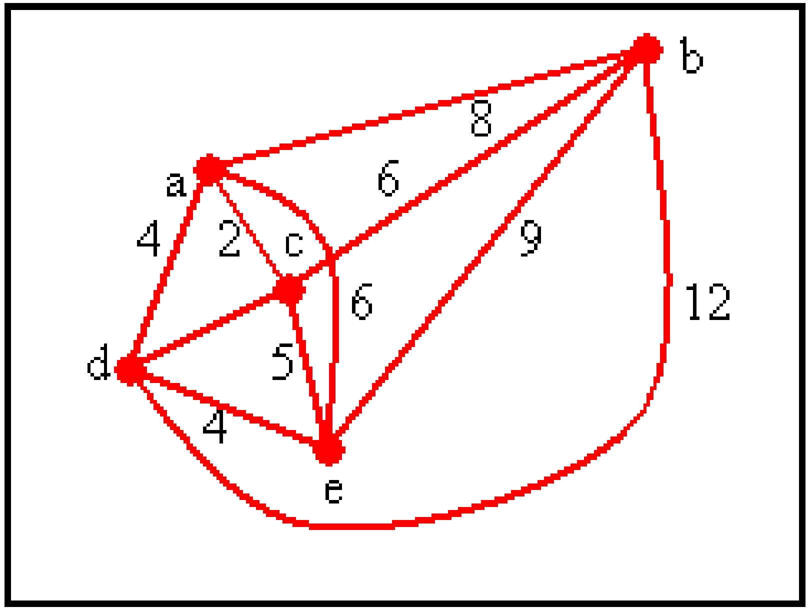


Örnek 7.1.5



- Tüm kenarları sayılarla etiketlenmiş olan çizgeye **ağırlıklı çizge** (weighted graph) denir.
- Bir ağırlıklı çizgede bir yolu oluşturan kenarların ağırlıkları toplamına o yolun **uzunluğu** denir.

[redacted]



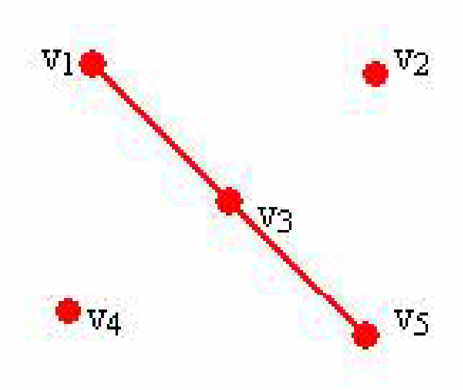
Yol	Uzunluk
a,b,c,d,e	21
a,b,d,c,e	28
a,c,b,d,e	24
a,c,d,b,e	26
a,d,b,c,e	27
a,d,c,b,e	22

Örnek 7.1.5

C++ programı ile bir algoritma çeşitli programcılar tarafından yazılmaktadır. Biz program içinde şu özelliklere bakıyoruz:

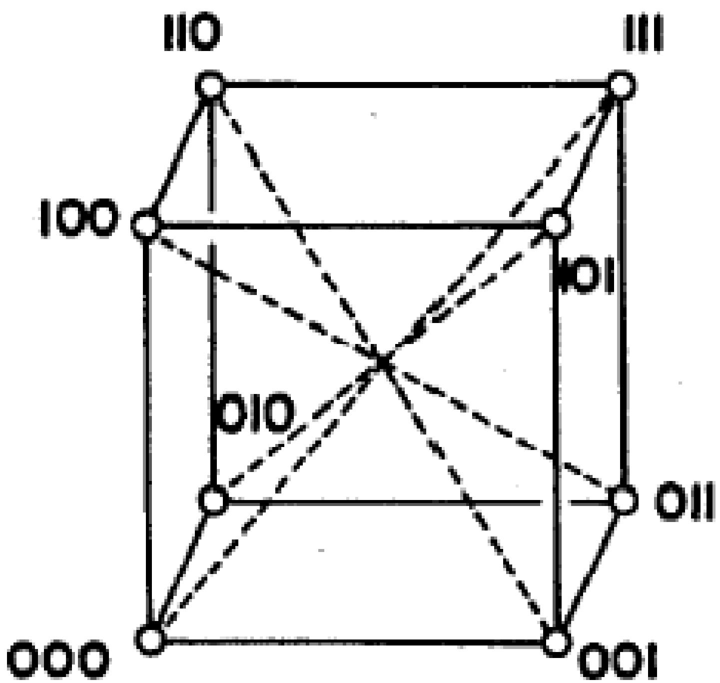
- program içinde yer alan satır sayısı,
- program içinde yer alan return deyimi sayısı,
- program içinde yer alan fonksiyon sayısı

Program	Program satırı sayısı	*return* deyimi sayısı	Fonksiyon çağrımı sayısı
1	66	20	1
2	41	10	2
3	68	5	8
4	90	34	5
5	75	12	14

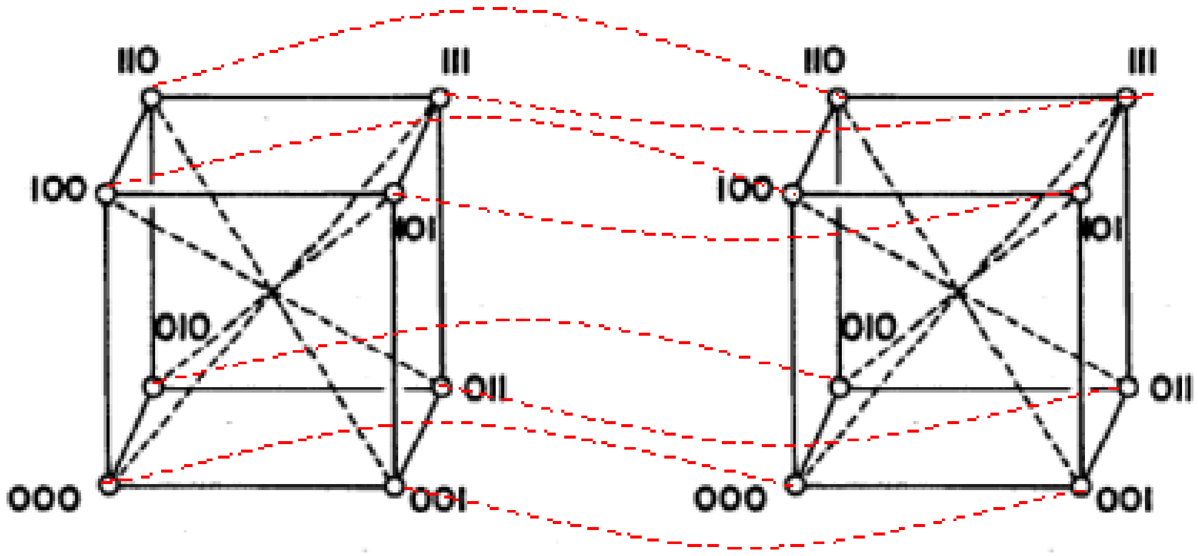


Örnek 7.1.6

- Bir **n-küp** $n \geq 1$ olmak üzere her biri bir köşesi $0, 1, \ldots, 2^n - 1$ ile etiketlenmiş olan ve 2^n sayıda işlemciye sahip olan küptür.

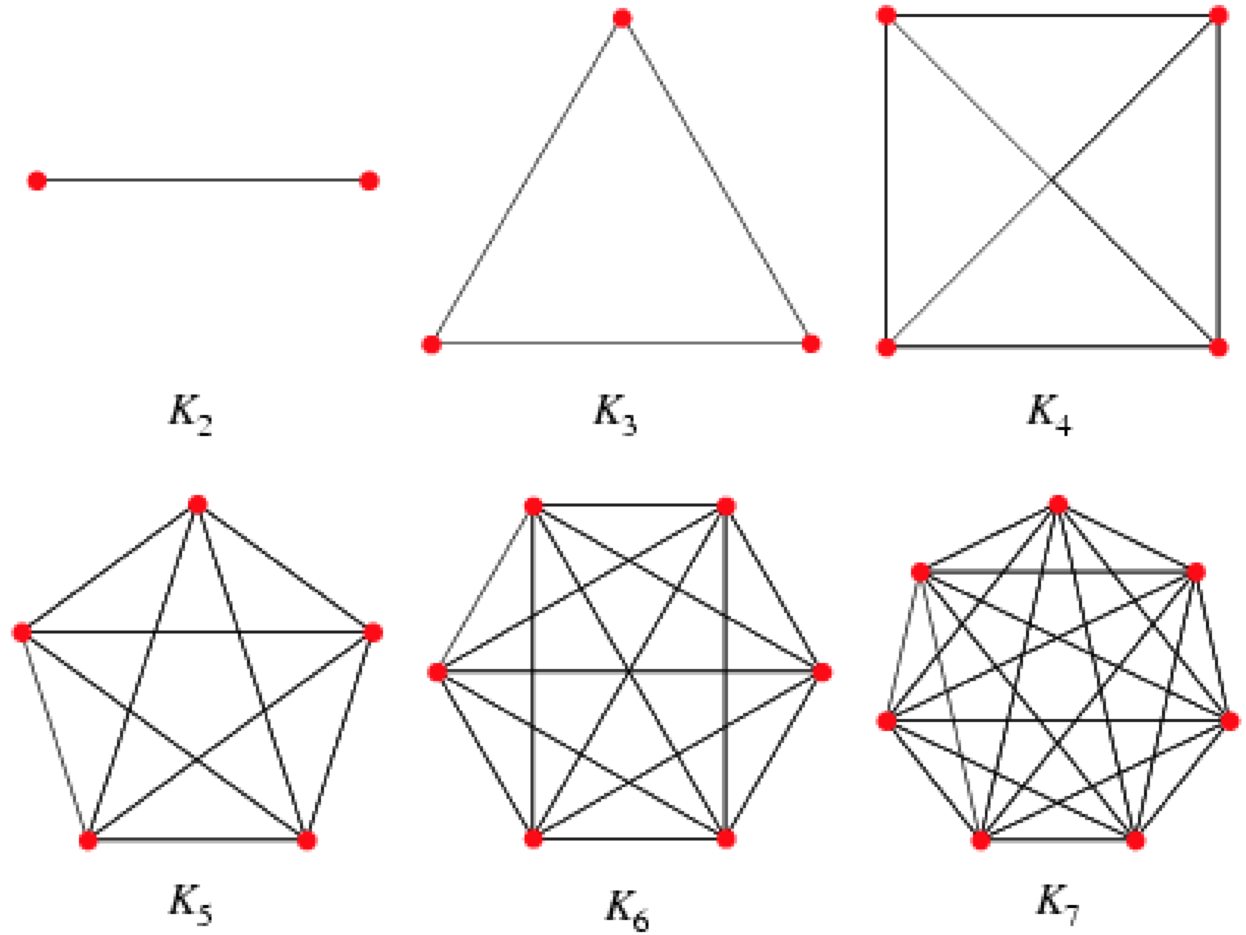


[redacted]



- Tanım: **:** Herbir köşe çifti arasında tek bir kenarın bulunduğu basit çizgelere n adet köşeden oluşan tam çizge denir ve bu K_n ile gösterilir.

[redacted]

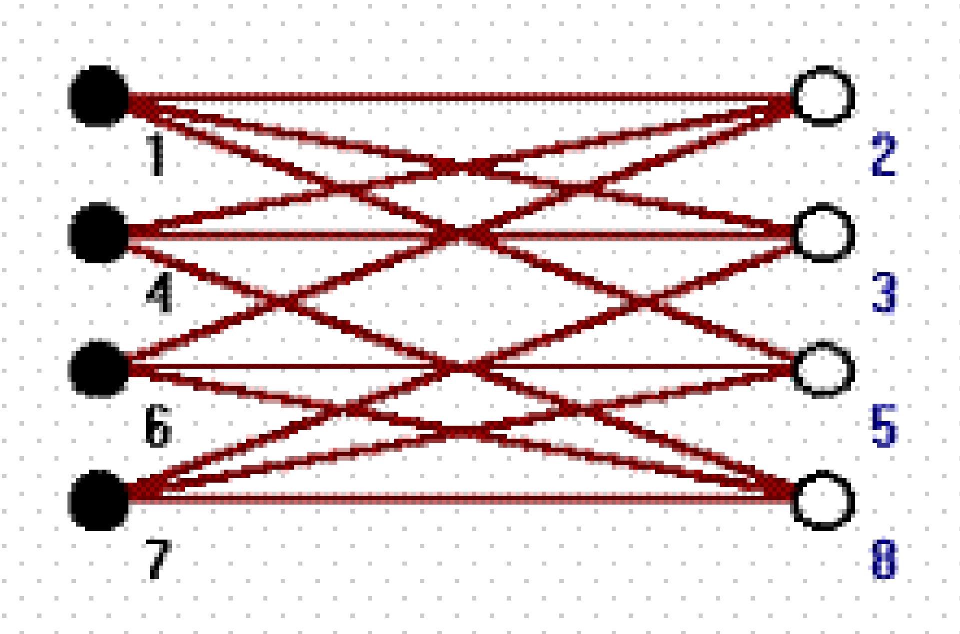


[redacted]

- **Tanım:** Bir G=(V,E) çizgesi verilsin. Eğer $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $V_1 \cup V_2 = V$ olacak şekilde V kümesinin iki alt kümesi var ve E kümesindeki herbir kenar, V_1 kümesindeki bir kenar ile V_2 kümesindeki bir kenarı birleştiriyorsa bu tür çizgelere *çift eşlikli çizge* denir.

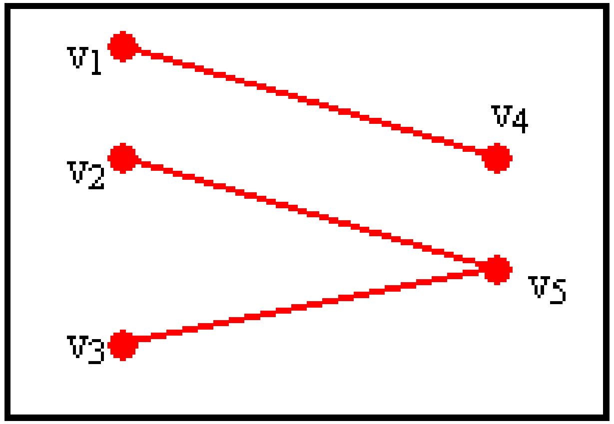
Örnek 7.1.10

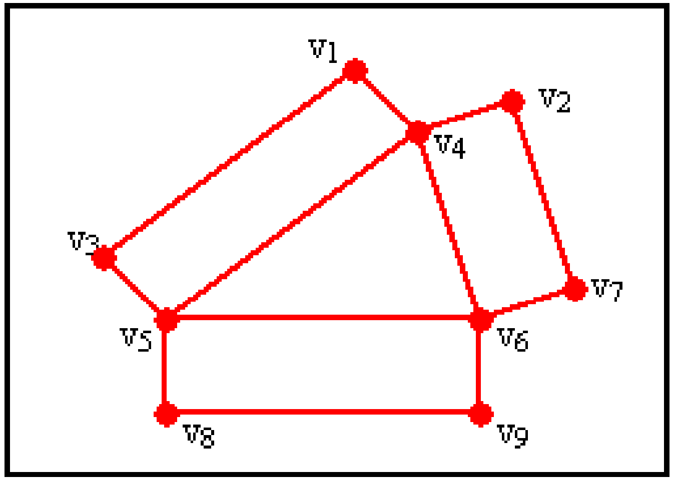
- : $V_1=\{1,4,6,7\}$, $V_2=\{2,3,5,8\}$



Örnek 7.1.11

- $V_1=\{v_1,v_2,v_3\}$, $V_2=\{v_4,v_5\}$

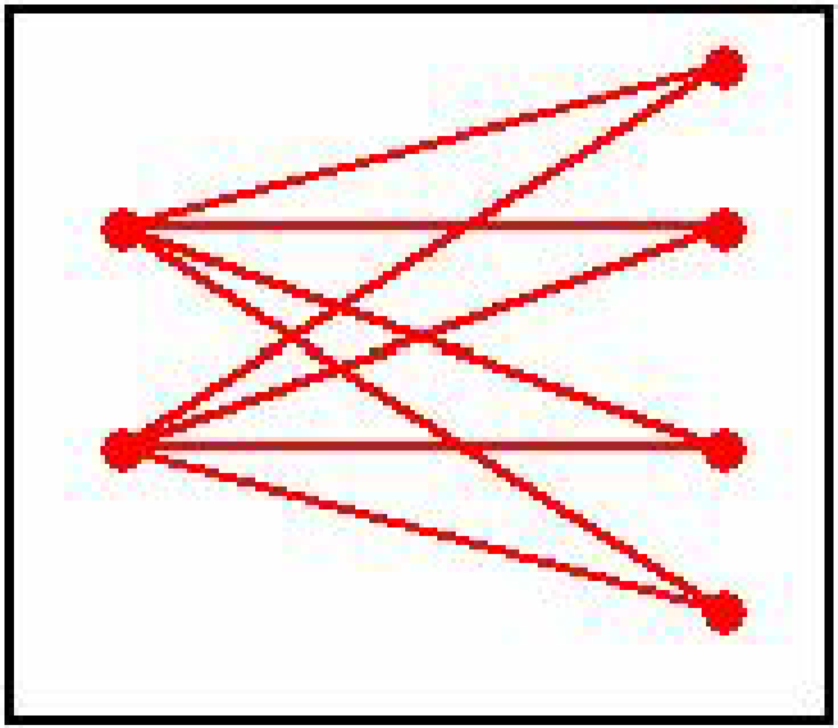




[redacted]

- **Tanım :** Eğer bir G basit çizgesinin köşeler kümesi biri m adet köşe içeren V_1 ve diğeri n adet köşe içeren V_2 gibi iki ayrık kümeye parçalanıyor ve $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ olmak üzere her bir v_1, v_2 çifti arasında bir kenar varsa G çizgesine **m ve n kenarlı tam çift eşlikli çizge** denir ve $\mathbf{K_{m,n}}$ ile gösterilir.

Örnek 71.15



[redacted]

Yollar
ve
Çevrimler

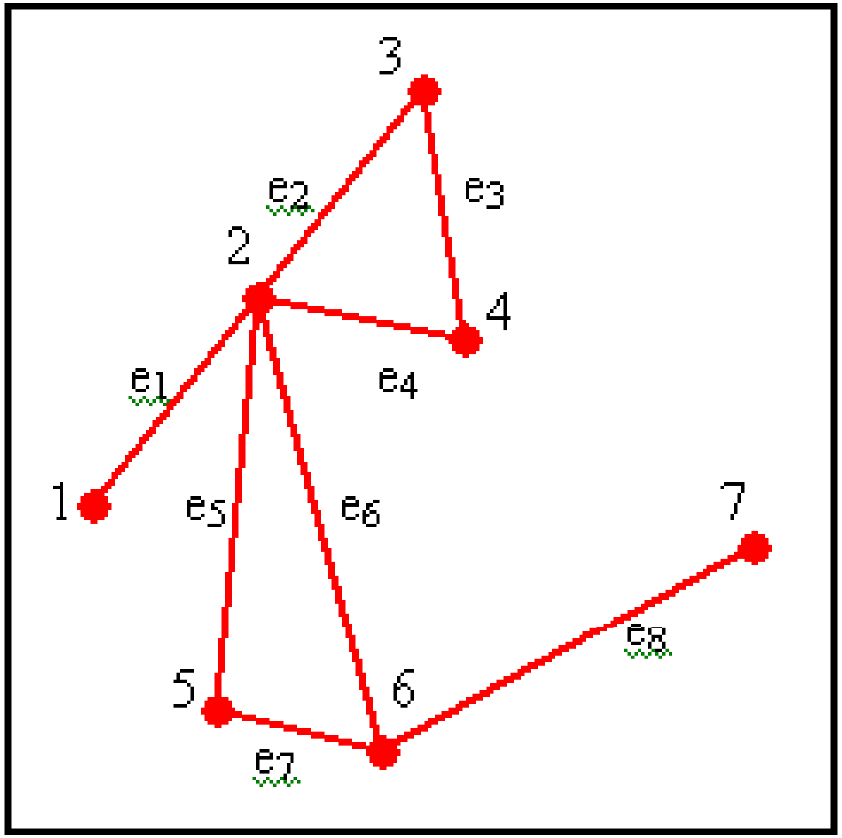
- **Tanım:** Bir çizgede iki köşe v_0 ve v_n olsunlar. v_0 köşesinden v_n köşesine uzunluğu n olan bir yol n+1 adet köşeden ve n adet kenardan oluşan v_0 ile başlayıp, v_n ile biten

  $$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$$

  şeklinde bir dizidir.

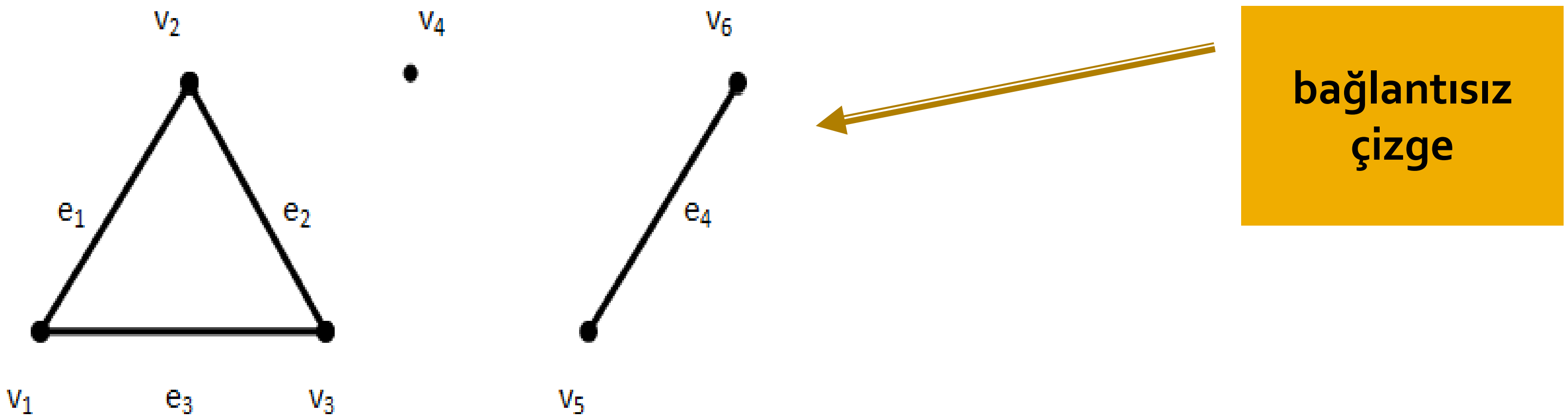
Örnek 7.2.2:

- $(1,e_1,2,e_2,3,e_3,4,e_4,2)$ dizisi uzunluğu 4 olan 1 köşesinden 2 köşesine bir yoldur

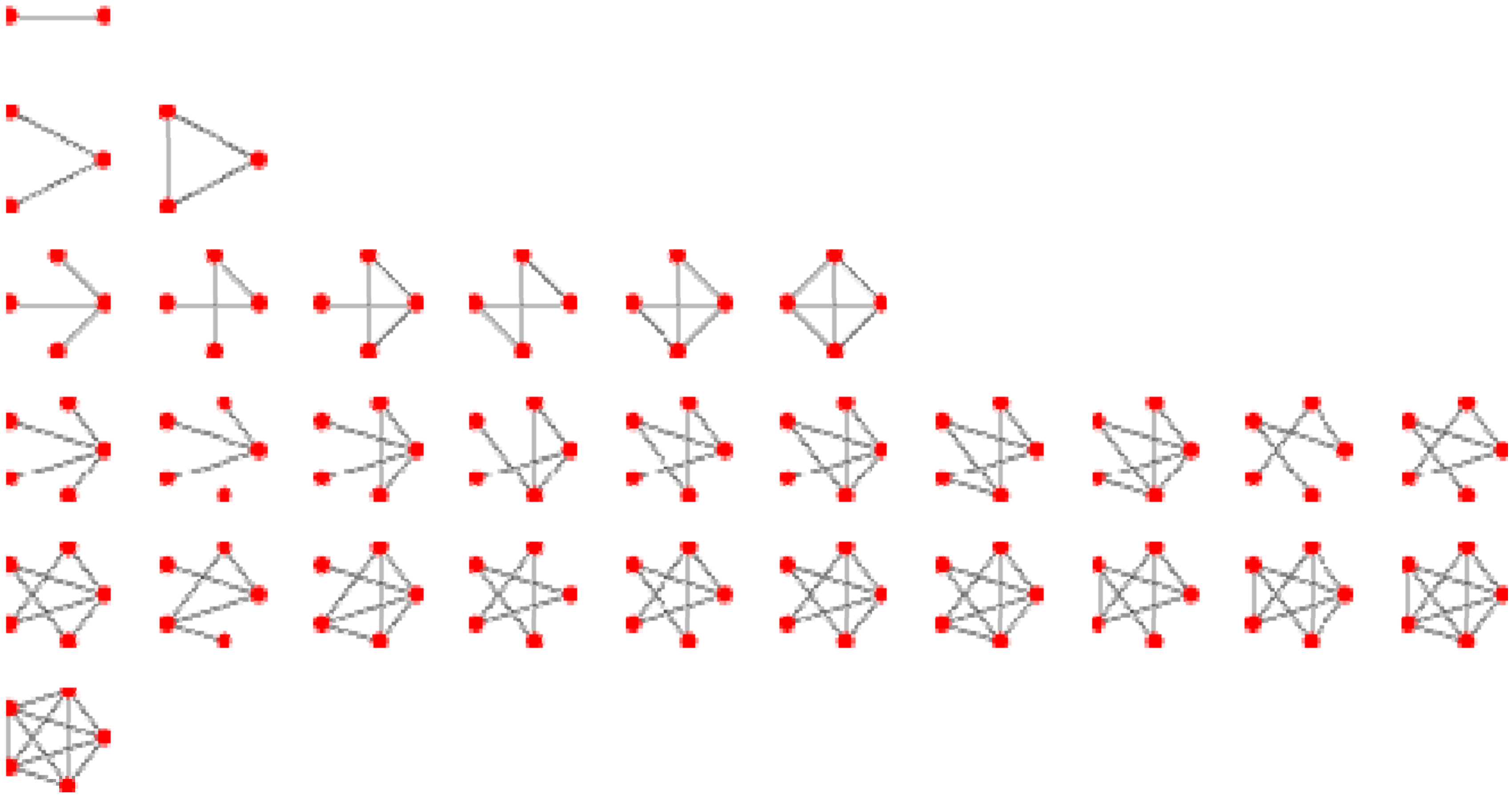


[redacted]

- **Tanım :** Bir G çizgesinde alınan herhangi iki köşe arasında bir yol bulunabiliyorsa bu G çizgesine *bağlantılıdır* denir.



[redacted]



[redacted]

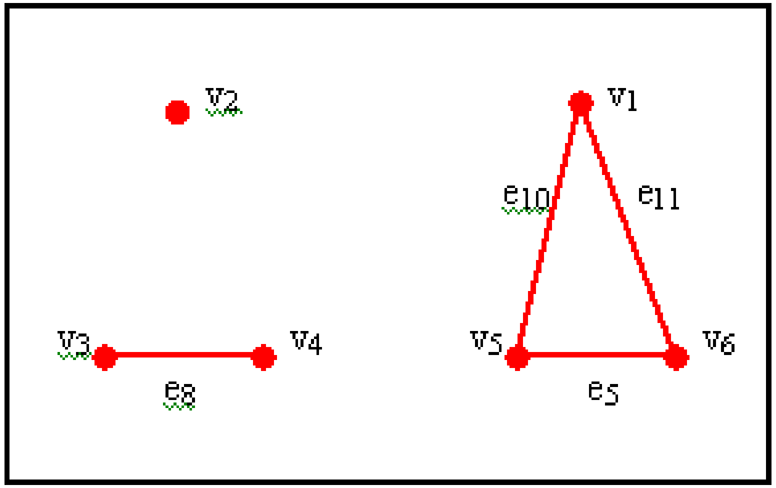
- **Tanım :** G=(V,E) bir çizge olsun. Eğer

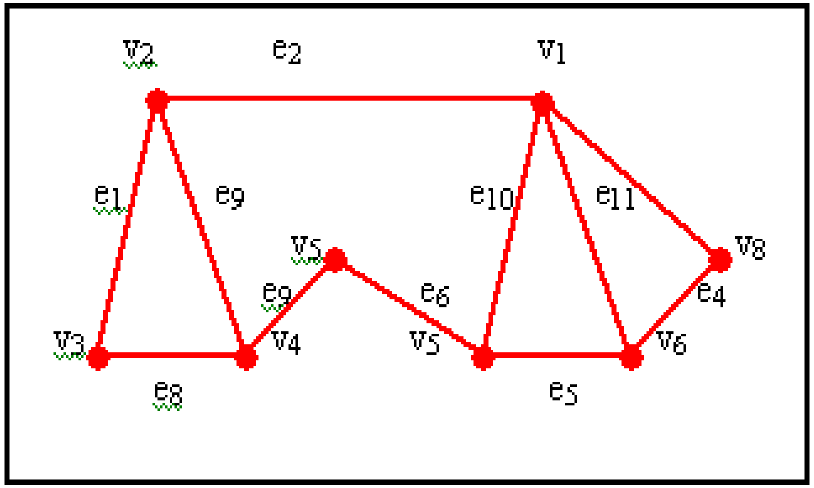
  a) $V' \subset V$ ve $E' \subset E$

  ve

  b) Her için, e′ kenarının bitim noktaları v′ ve w′ olduğunda, $v', w' \in V'$ ise, bu durumda (V′,E′) ikilisine G çizgesinin bir **alt çizgesi** denir

Örnek 7.2.8:


v2
v1
e10
e11
v3
v4
v5
v6
e8
e5


v2
e2
v1
e1
e9
e10
e11
v5
v8
e9
e6
e4
v3
v4
v5
v6
e8
e5

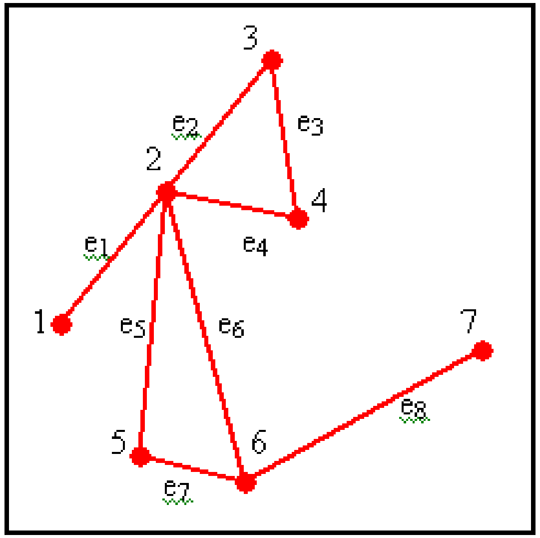
[redacted]

- **Tanım :** G bir çizge ve G çizgesinde bir köşe v olsun. Eğer G çizgesinin bir G′ altçizgesi, bir v köşesi ile başlayan bir yolu oluşturan tüm kenar ve köşelerden oluşuyorsa bu G′ altçizgesine **v köşesini kapsayan G çizgesinin bileşeni** denir.

[redacted]

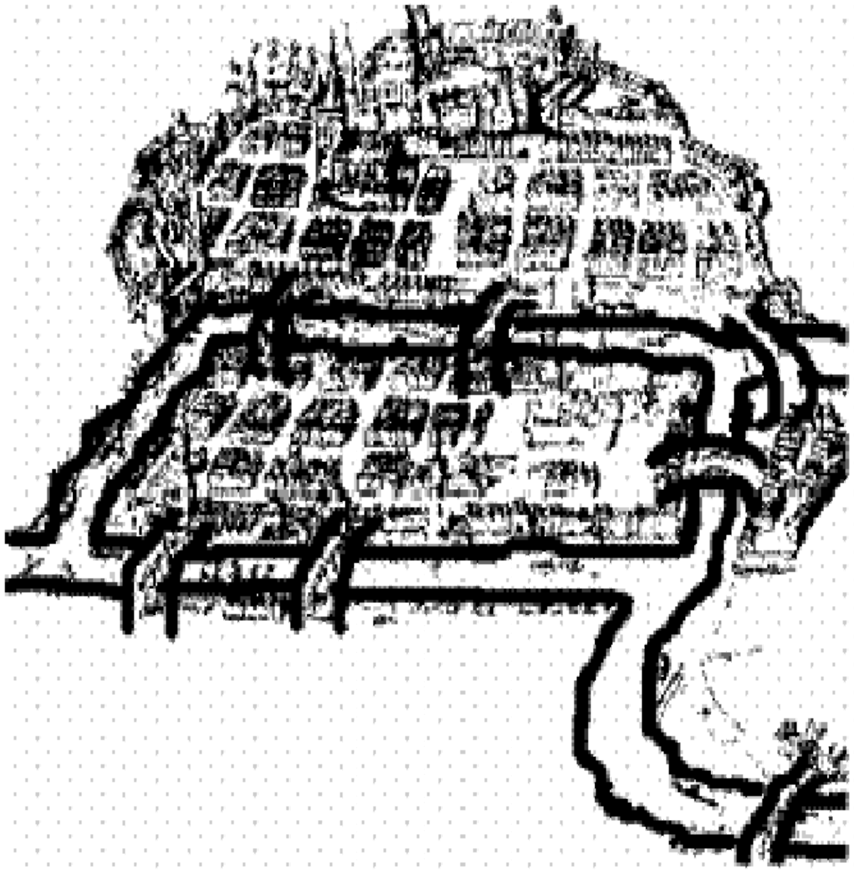
- **Tanım:** Bir G çizgesinde iki köşe v ve w olsunlar. Eğer v köşesinden w köşesine olan bir yol tekrarı olan bir köşe içermiyorsa bu yola *basit yol* denir.
- Eğer v köşesinden yine v köşesine tekrar etmeyen kenarlar ile sıfır olmayan uzunlukta bir yol varsa bu yola *çevrim* (circuit) denir.
- Eğer v köşesinden başlayıp yine v köşesinde biten, başlangıç ve bitiş köşeleri hariç tekrar etmeyen köşeler ile bir yol varsa bu yola *basit çevrim* denir.

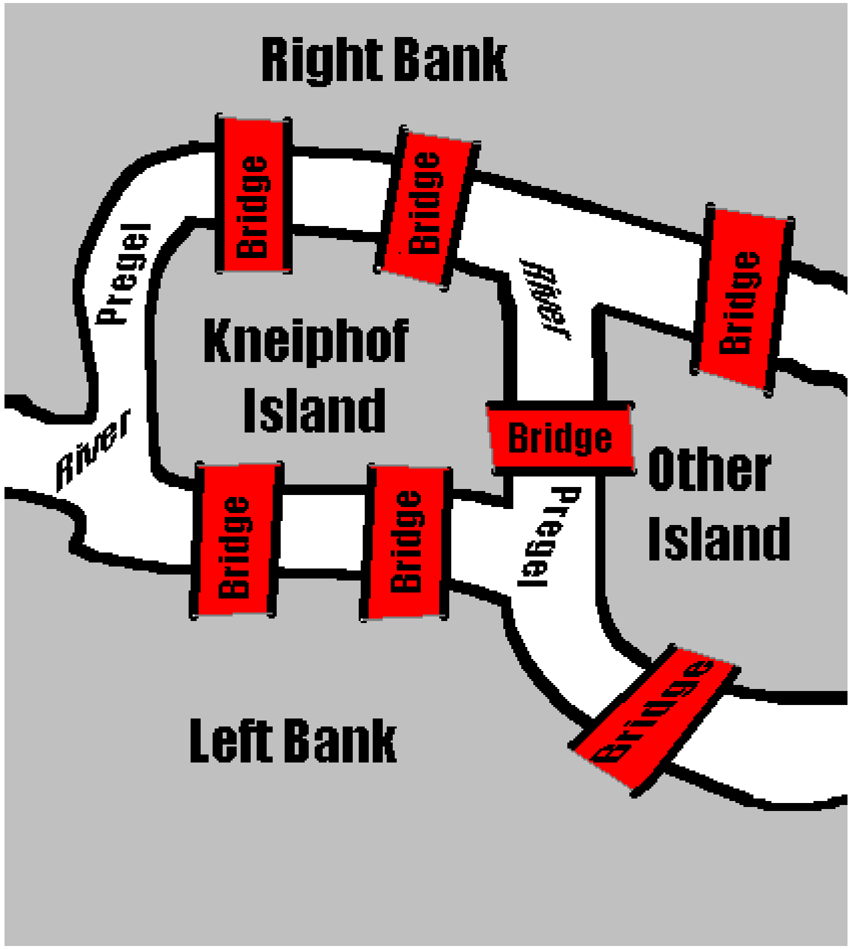
Örnek 7.2.13



Yol	Basit Yol	Çevrim	Basit Çevrim
(6,5,2,4,3,2,1)	değil	değil	değil
(6,5,2,4)	evet	değil	değil
(2,6,5,2,4,3,2)	değil	evet	değil
(5,6,2,5)	değil	evet	evet
(7)	evet	değil	değil

Königsberg Köprü Problemi





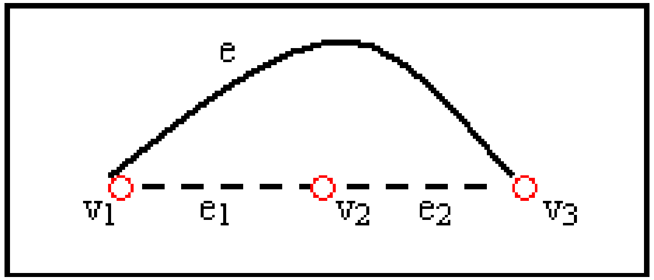
Euler Çevrimi

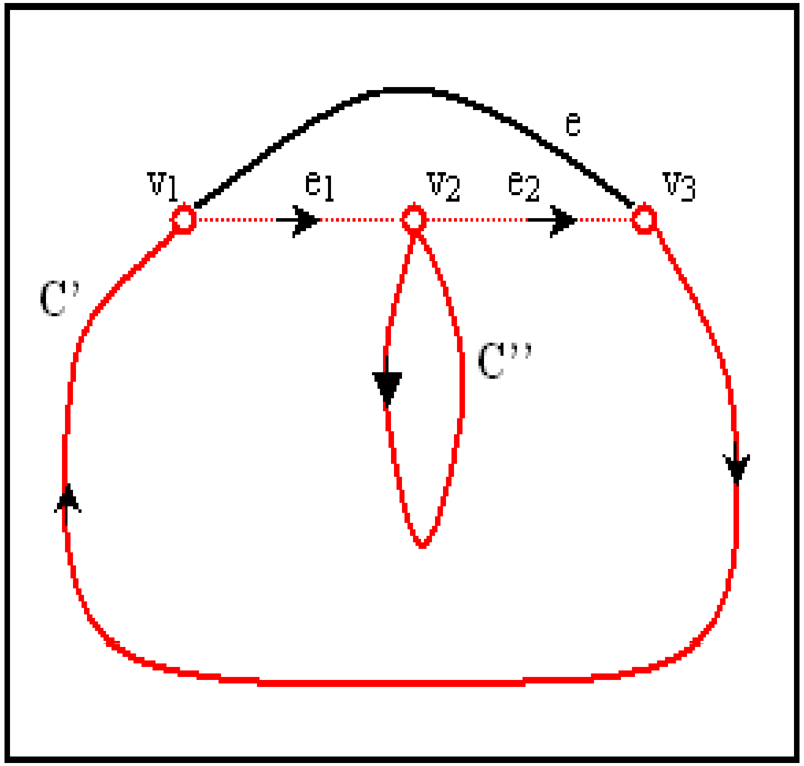
Herhangi bir G çizgesinde, G çizgesinin tüm köşelerini ve kenarlarını içeren bir çevrim bulunabiliyorsa bu çevrime bir Euler çevrimi denir

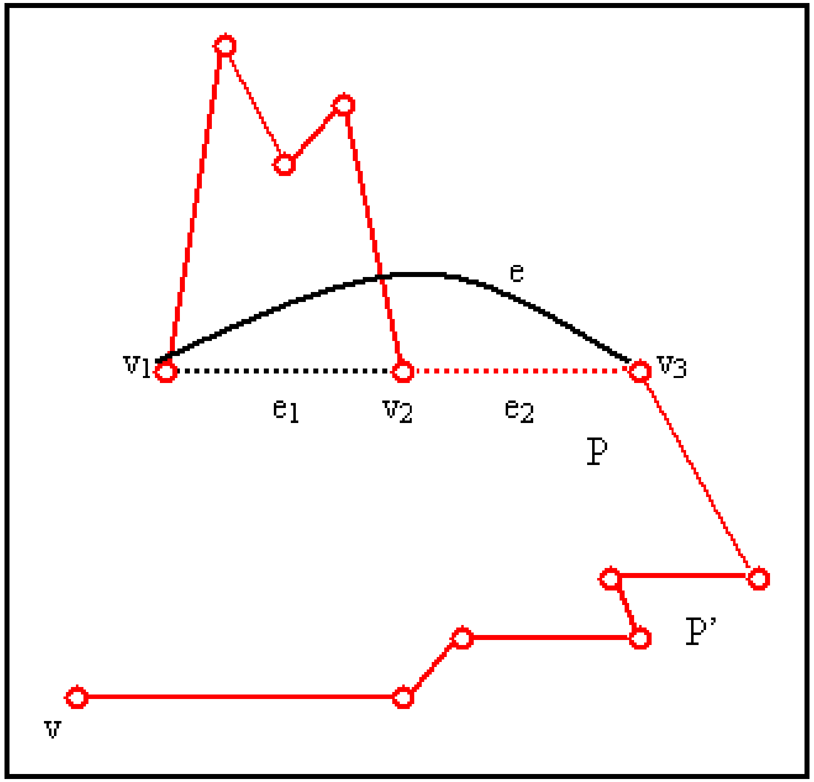
[redacted]

- **Tanım 7.2.15:** Bir çizgede bulunan bir v köşesinden ayrılan tüm kenarların sayısı d(v) ile gösterilir ve buna v köşesinin köşe derecesi denir.
- **Teorem 7.2.16:** Eğer bir G çizgesi bir Euler çevrimine sahipse, bu durumda G bağlantılıdır ve her bir köşenin köşe derecesi çifttir.
- **Teorem 7.2.17:** Eğer G bir bağlantılı çizge ve çizgede her bir köşenin köşe derecesi çift ise, bu durumda G bir Euler çevrimi içerir.

Teorem 7.2.17





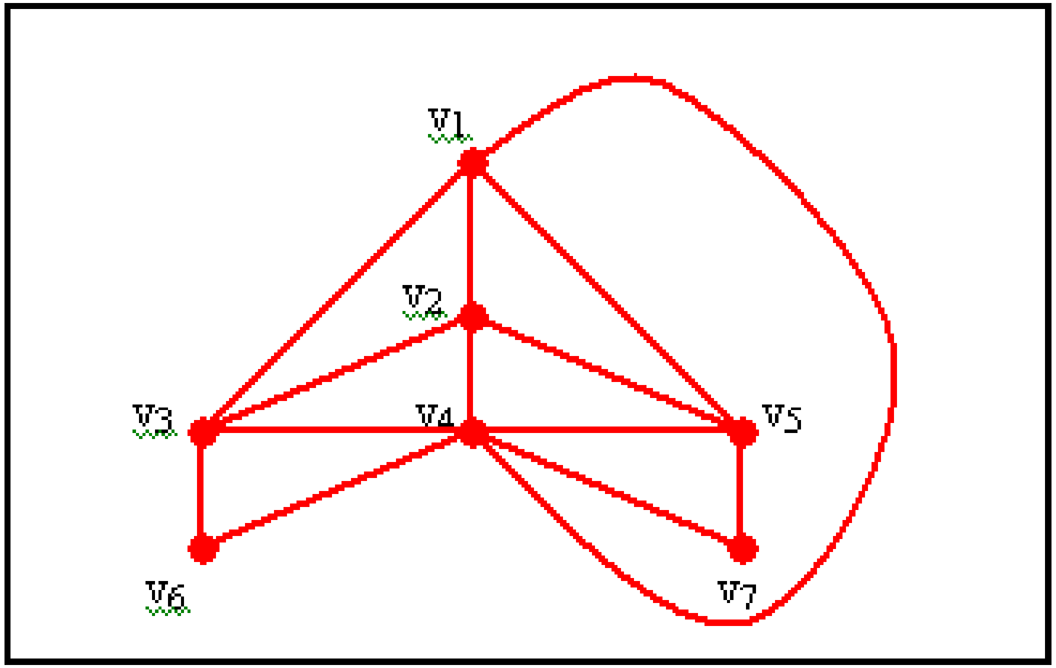


[redacted]

!!! Eğer bir çizgede köşelerden birinin köşe derecesi tek ise, bu durumda çizge **HERHANGİ BİR EULER ÇEVRİMİ İÇEREMEZ**.

Eğer bir çizge **BAĞLANTILI** ve **HER BİR** köşesinin **KÖŞE DERECESİ ÇİFT** ise, bu durumda çizge **EN AZ BİR** (genellikle daha fazla) **EULER ÇEVRİMİ İÇERİR.**

Örnek 7.2.18



[redacted]

- **Teorem 7.2.19:** m adet kenarı ve $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ köşeleriyle bir çizge G olsun, bu durumda

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$$

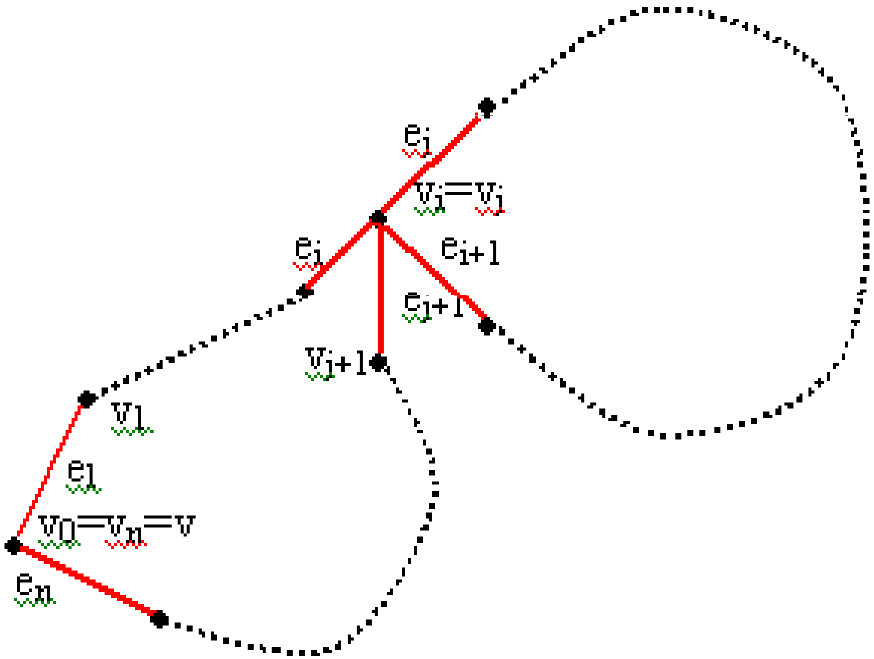
ile verilir. Bir başka deyişle bir çizgede tüm köşelerin köşe derecelerinin toplamı çifttir.

[redacted]

- **Sonuç 7.2.20:** Herhangi bir çizgede tek dereceli köşelerin sayısı çifttir.
- **Teorem 7.2.21:** Bir çizgenin bir v köşesinden bir diğer w köşesine ($v \neq w$), çizgenin tüm kenar ve köşelerinden oluşan tekrar etmeyen kenarlar ile bir yol içermesi için gerekli ve yeterli koşul çizgenin bağlantılı, v ve w köşelerinin tek dereceye sahip yegane köşeler olmasıdır.

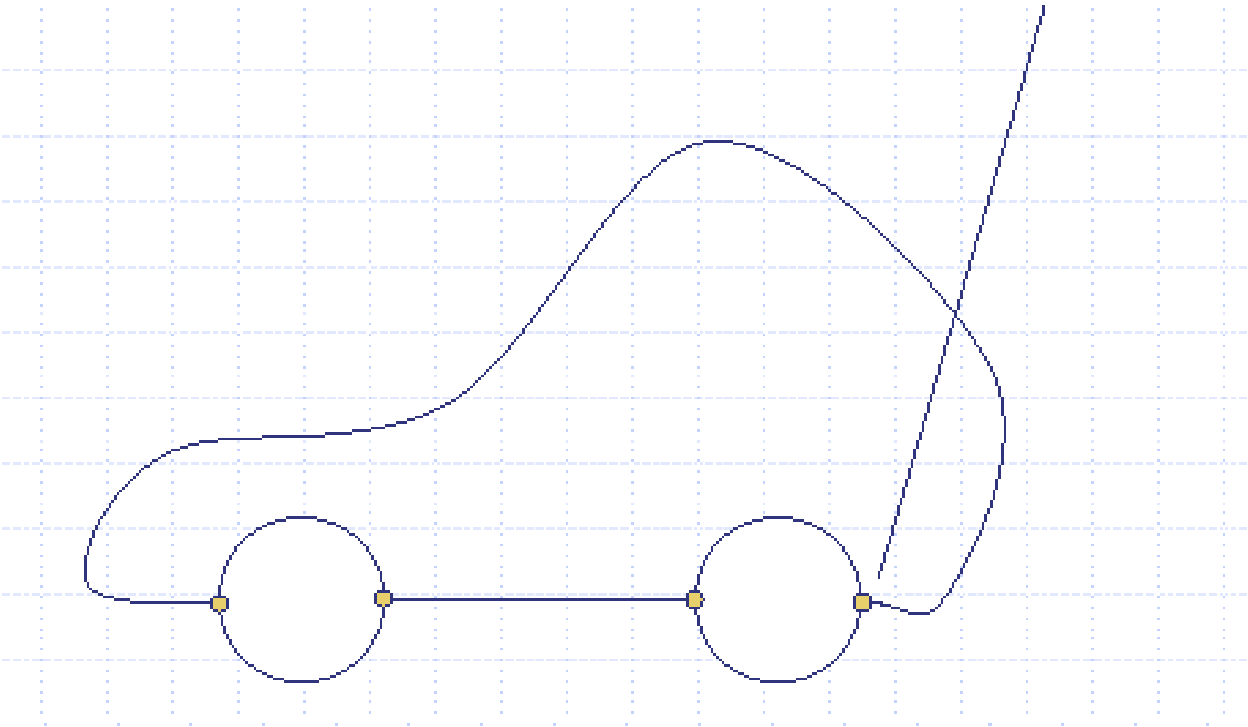
[redacted]

- **Teorem 7.2.22:** Eğer bir G çizgesi v köşesinden yine v köşesine bir çevrim içerirse, bu durumda G çizgesi v köşesinden yine v köşesine bir basit çevrim içerir.

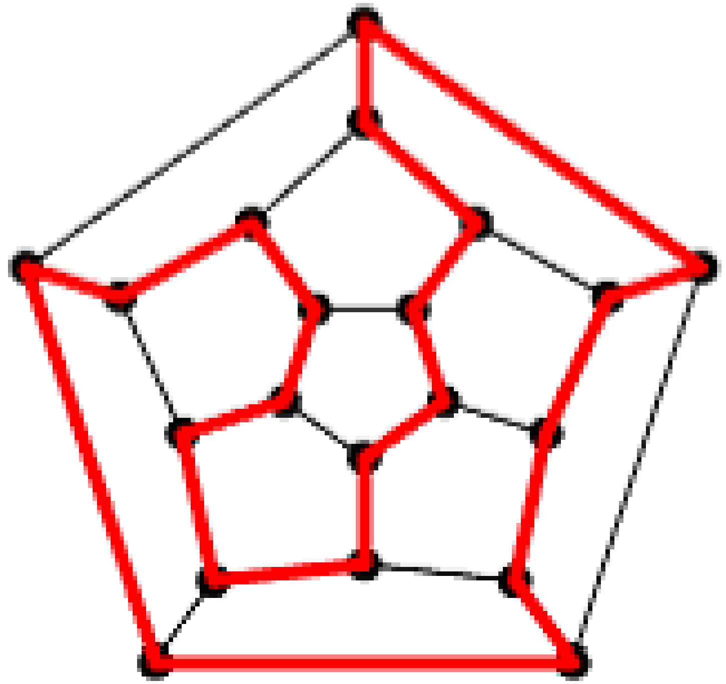


Soru

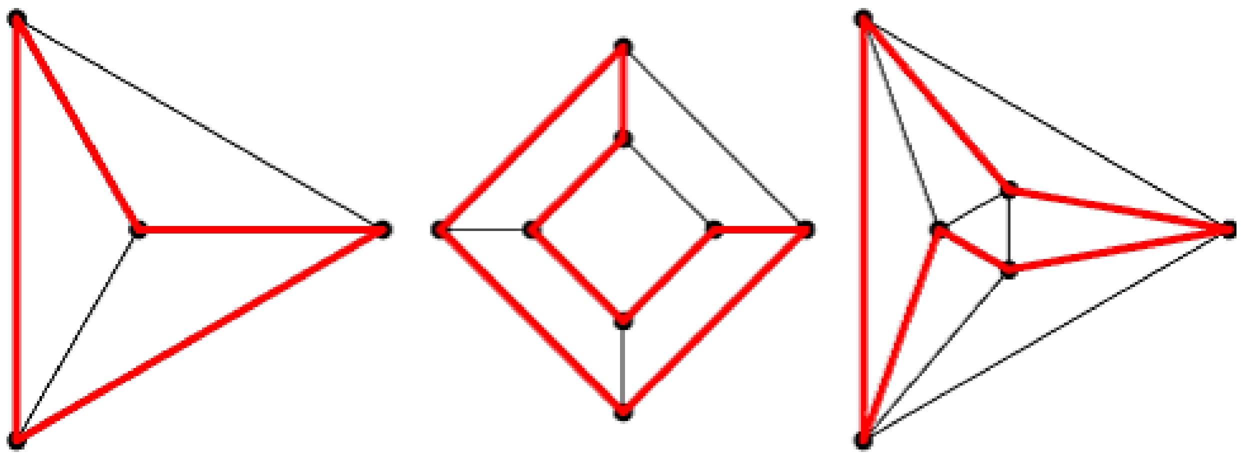
- Aşağıdaki çizge bir Euler çevrimi içerirmi?



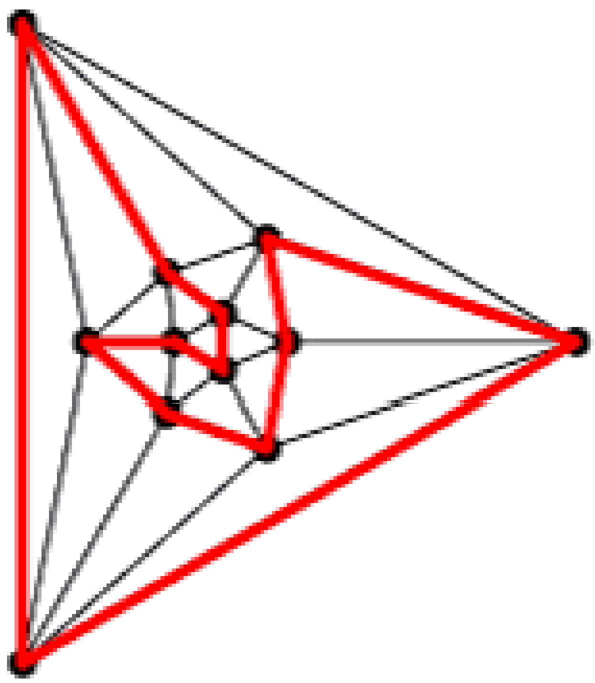
Hamilton Çevrimi ve Pazarlamacı Problemi



- Eğer bir G çizgesinde var olan bir çevrim G çizgesindeki her bir köşeyi başlangıç ve bitiş köşeleri hariç yalnız bir kez içeriyorsa bu tür çizgelere bir Hamilton çizgesi denir



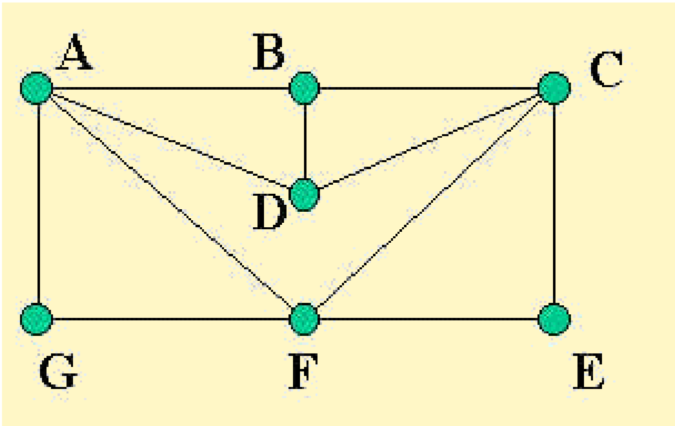
[redacted]



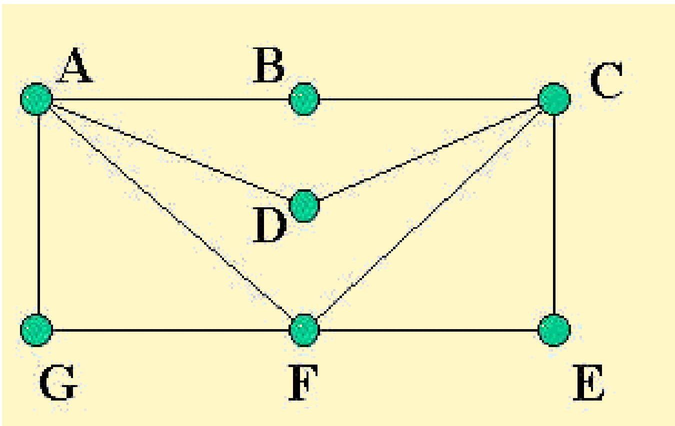
Hamilton Yolu

- **Tanım:** Bir çizgede, çizgenin tüm köşelerini her bir köşeyi en fazla bir kez olmak üzere ziyaret edebilen bir yol bulunabiliyorsa bu yola bir Hamilton yolu denir. Eğer bu Hamilton yolu bir çevrimse, buna da bir Hamilton çevrimi denir.

[redacted]



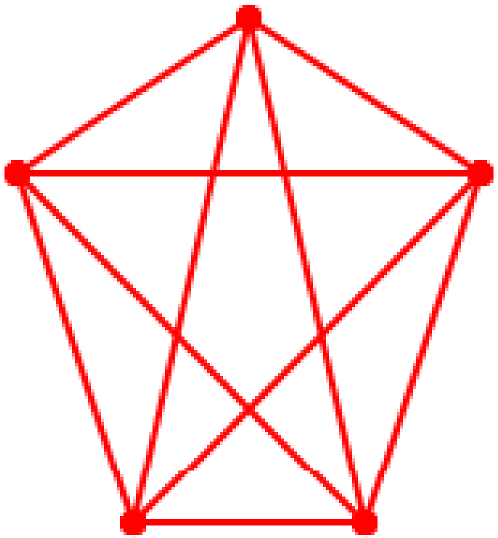
AGFECDBA
Bir Hamilton çevrimidir.



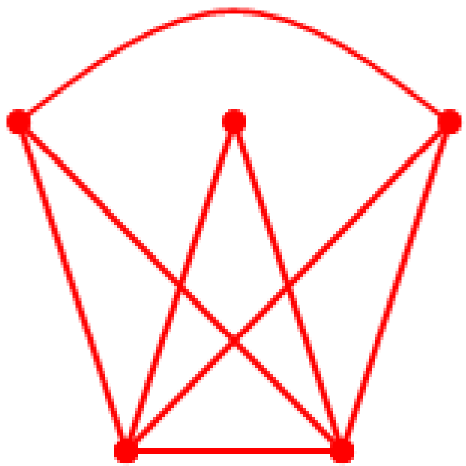
Hamilton çevrimi yoktur.

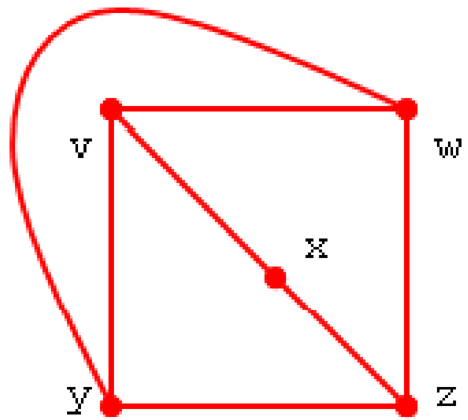
[redacted]

- **Teorem :** Bir G=(V,E) basit çizgesi için, eğer $|V|=n\geq 3$ ve eğer her $v\in V$ için $\delta(v)\geq n/2$ ise, bu durumda G bir Hamilton çevrimi içerir.



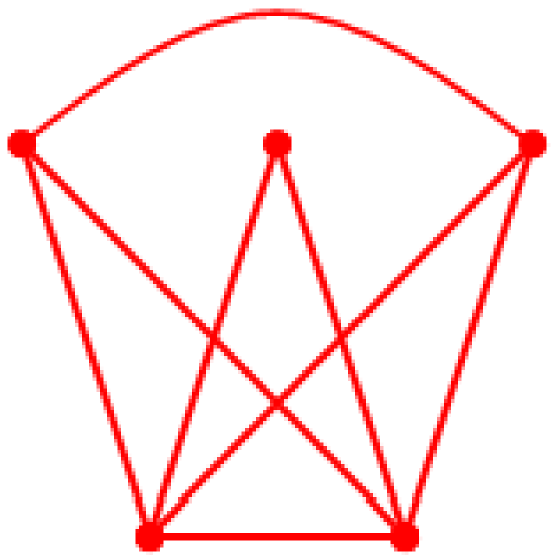
[redacted]





[redacted]

- **Teorem:** n adet köşe içeren bir basit G çizgesi, en az ½(n-1)(n-2)+2 kenarı varsa bu durumda G bir Hamilton çevrimseli içerir.



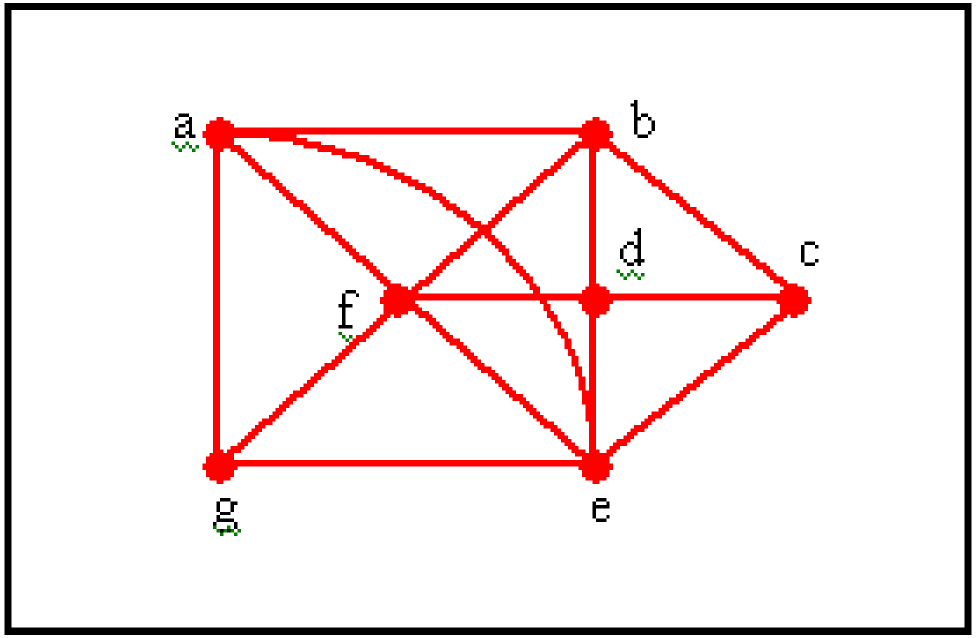
[redacted]

- **Teorem :** G=(V,E) bir basit çizge ve $|V|=n\geq 3$ olsun. Eğer birbiri ile herhangi bir kenarla bağlantılı olmayan herbir v ve w köşe çifti için

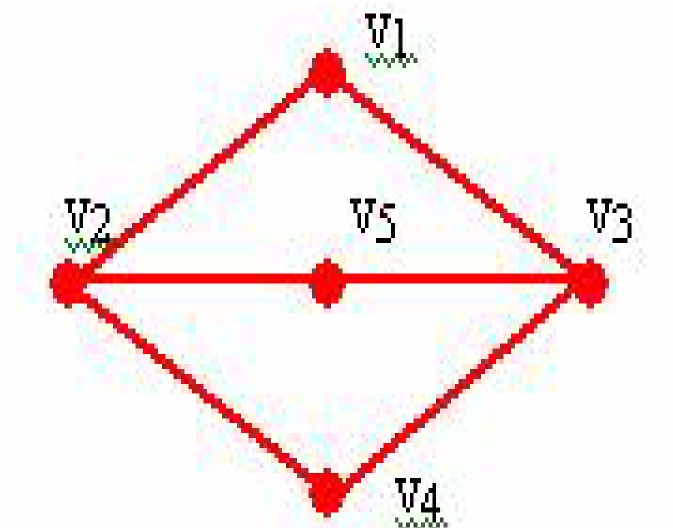
  $$\delta(v)+\delta(w)\geq n$$

  koşulu sağlanırsa, G çizgesi bir Hamilton çevrimseli içerir.

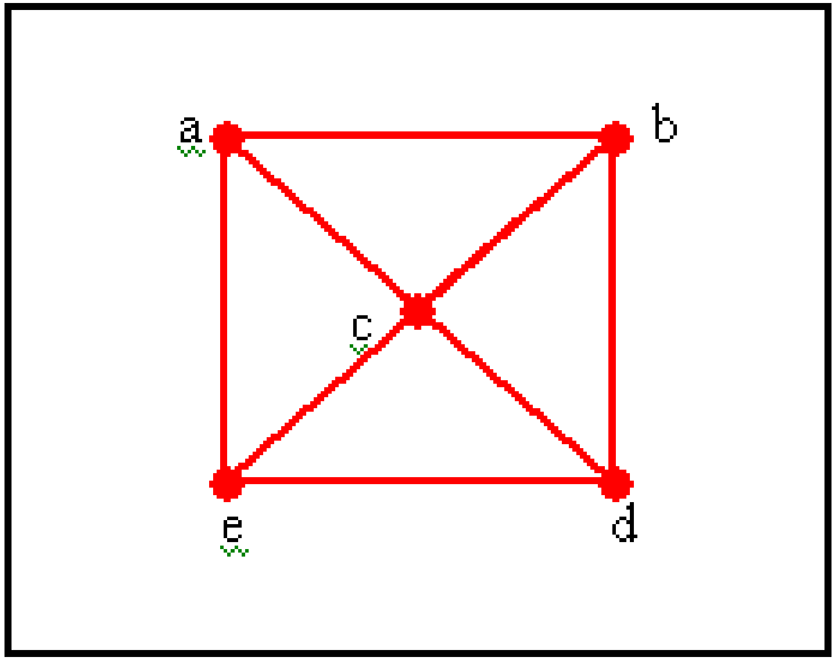
Örnek 7.3.2.



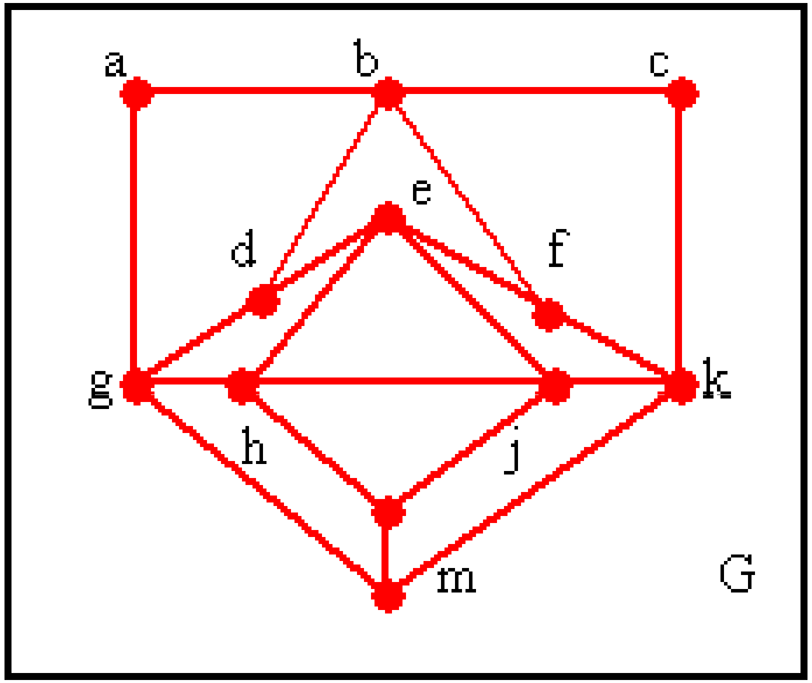
Örnek 7.3.3:



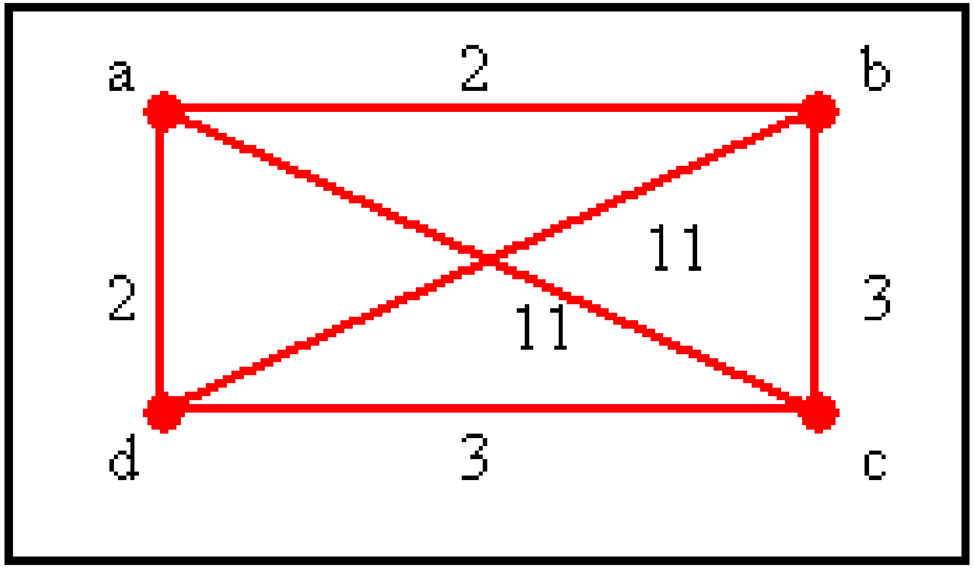
[redacted]



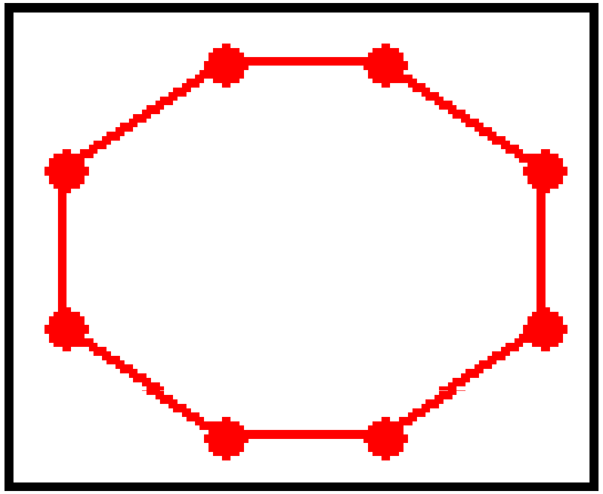
Örnek 7.3.4.



Örnek 7.3.5:



Örnek 7.3.6:



- Bir n-küpün bir Hamilton çevrimi içermesi için gerekli ve yeterli koşul $n \geq 2$ olması ve aşağıdaki koşulları sağlayan n adet bit'ten oluşan karakter dizilerinin bir

  $$s_1, s_2, \ldots, s_n \qquad (*)$$

  dizisi var olmasıdır.

[redacted]

1. Her n-bit karakter dizisi dizi içinde herhangi bir yerde bulunur.
2. $i=0,\ldots,2^n-1$ için s_i ve s_{i+1} karakter dizileri arasındaki fark kesinlikle tek bir bit'tedir.
3. s_n ile s_1 karakter dizileri arasındaki fark kesinlikle tek bir bit'tedir.

- (*) ile verilen diziye bir Gray kodlaması denir.

$n \geq 2$ olduğunda, bir Gray kodu bir

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, s_1$$

Hamilton çevrimine karşı gelir.

[redacted]

- **Teorem:** 0,1 dizisi G_1 ile gösterilsin. Aşağıda verilen kurallarla G_{n-1} 'e bağlı olarak bir G_n dizisi tanımlayalım:
  a) G_{n-1} dizisini tersten yazmakla elde edilen dizi G^R_{n-1} ile tanımlansın
  b) G_{n-1} dizisindeki her bir bileşenin önüne 0 eklemekle elde edilen yeni dizi G'_{n-1} ile gösterilsin.
  c) $G_{n-1}{}^R$ dizisindeki her bir bileşenin önüne 1 eklemekle elde edilen yeni dizi G''_{n-1} ile gösterilsin.
  d) G'_{n-1} dizisini G''_{n-1} dizisinin takip etmesiyle elde edilen dizi G_n olsun
  Bu durumda her bir pozitif n tamsayısı için G_n bir Gray kodudur.

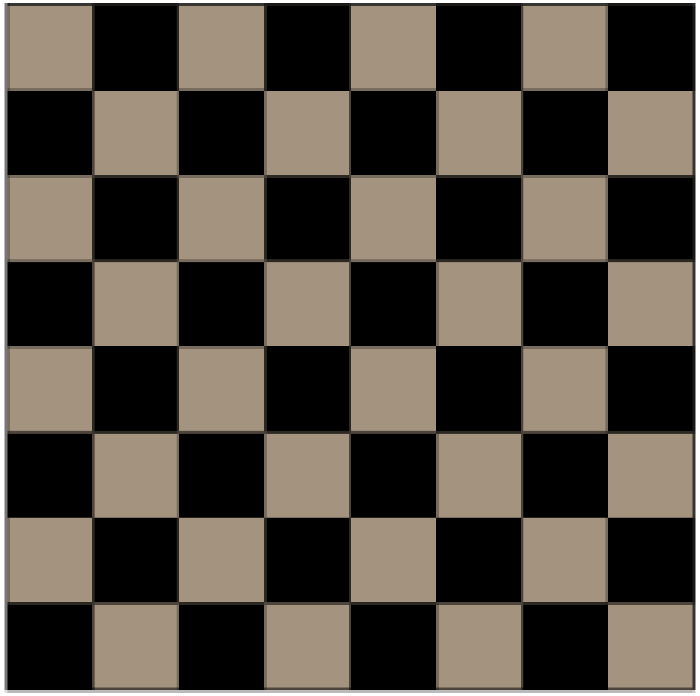
$\mathbf{G_1}$	**0**	**1**						
G_1^R	1	0						
G_1'	00	01						
G_1''	11	10						
G_2	00	01	11	10				
G_2^R	10	11	01	00				
G_2'	000	001	011	010				
G_2''	110	111	101	100				
G_3	000	001	011	010	110	111	101	100

Örnek 7.3.10: Atın Yolu

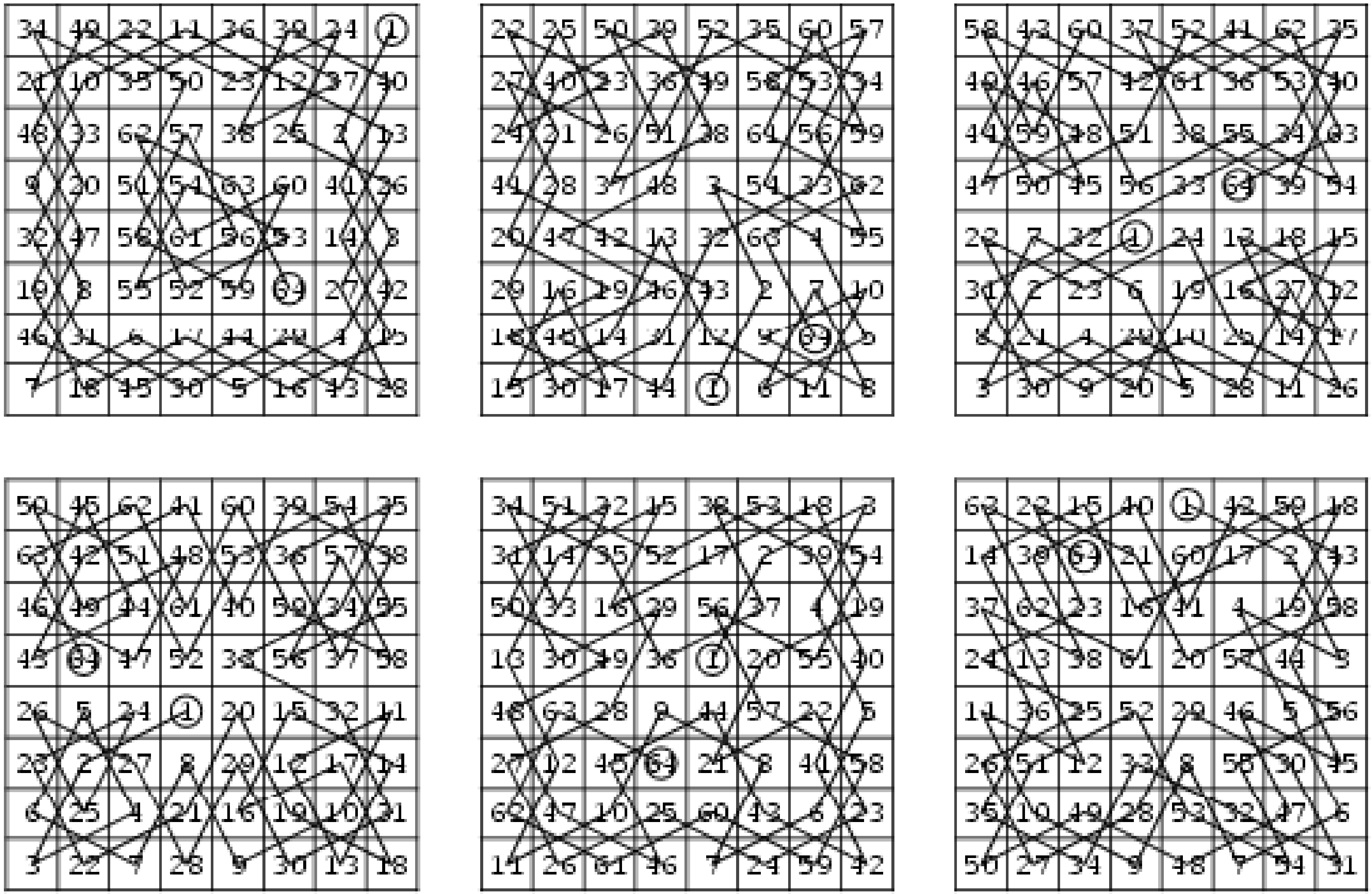
- Bir *n x n tahta üzerinde bir atın yolu*, atın herhangi bir kareden başlayıp legal hareketlerle tahta üzerinde bulunan tüm kareleri ziyaret edip yine başlangıç yerine gelmesidir.

Örnek 7.3.10

	X		X	
X				X
		K		
X				X
	X		X	



[redacted]



Algoritma 7.4.1: DIJKSTRA En Kısa Yol Algoritması

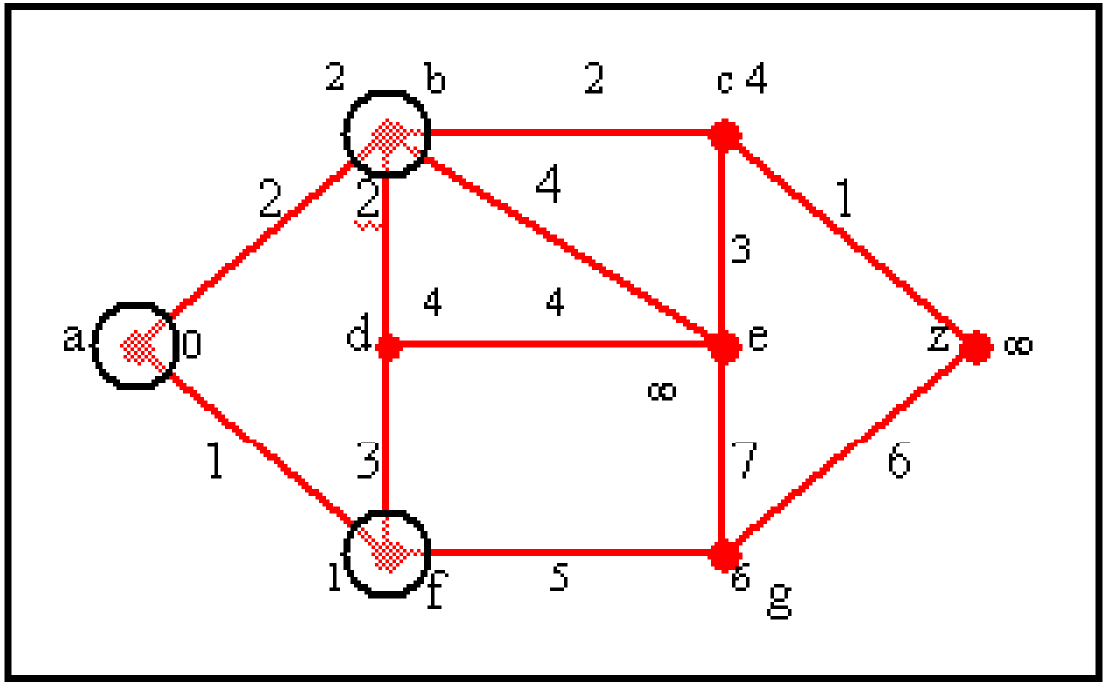
Bu algoritma bir bağlantılı, ağırlıklı çizgede bir a köşesinden bir z köşesine olan en kısa yolun uzunluğunu bulur. (i,j) kenarının ağırlığı w(i,j)>0 ‘dır ve x köşesinin etiket değeri L(x) ‘dir.

Girdi: Tüm ağırlıkları pozitif olan bir bağlantılı, ağırlıklı çizge; a ve z köşeleri

Çıktı: L(z) değeri

```
dijkstra(w,a,z,L) {
    L(a)=0
    for all vertices x≠a
        L(x)=∞
    T:= set of all vertices
    // T is the set of vertices whose shortest distance from
    // a has not be found
    while (z∈T) {
        choose v∈T with minimum L(v)
        T=T-{v}
        for each x∈T adjacent to v
            L(x):=min{L(x),L(v)+w(v,x)}
    }
}
```

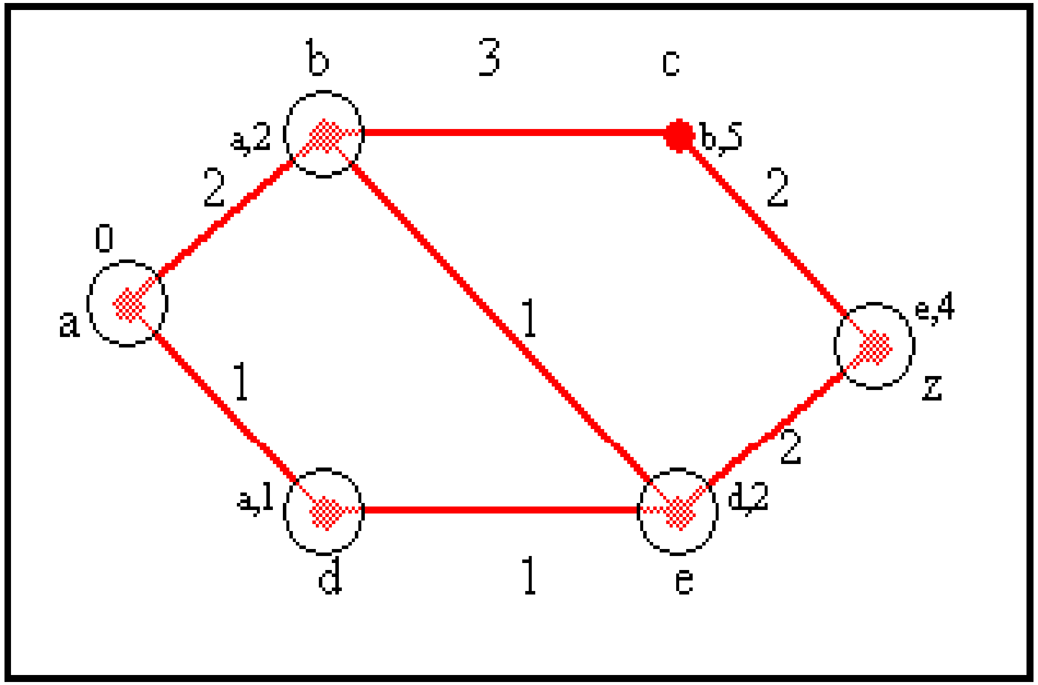
Örnek 7.4.2:



[redacted]

- **Teorem 7.4.3:** Dijkstra En Kısa Yol Algoritması bir a köşesinden bir z köşesine olan en kısa yolu bulur.

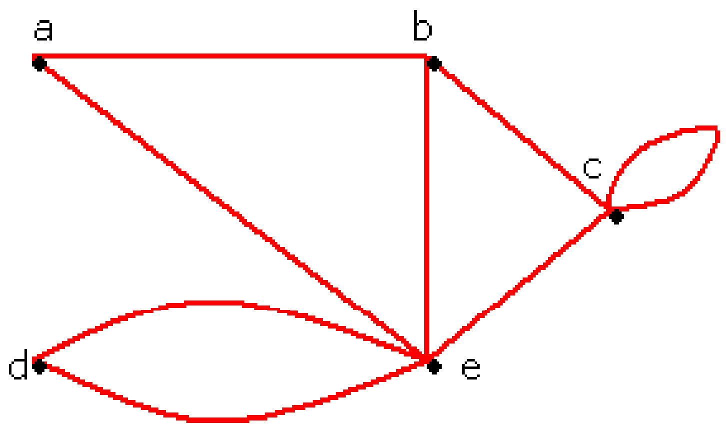
Örnek 7.4.4:



[redacted]

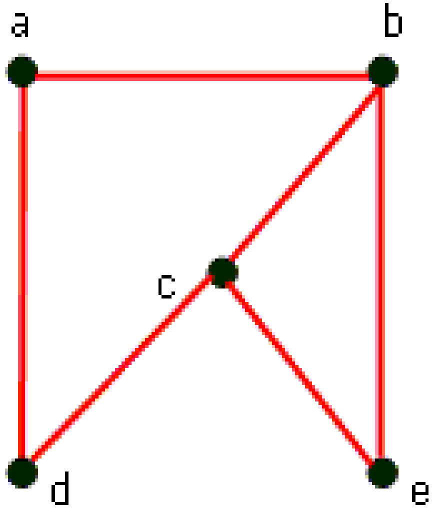
- **Teorem 7.4.5:** n adet köşeden oluşan bir basit, bağlantılı ve ağırlıklı çizgeyi girdi olarak alan Dijkstra algoritması için en kötü durum çalışma zamanı $\Theta(n^2)$ olmaktadır.

[redacted]



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

[redacted]



$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

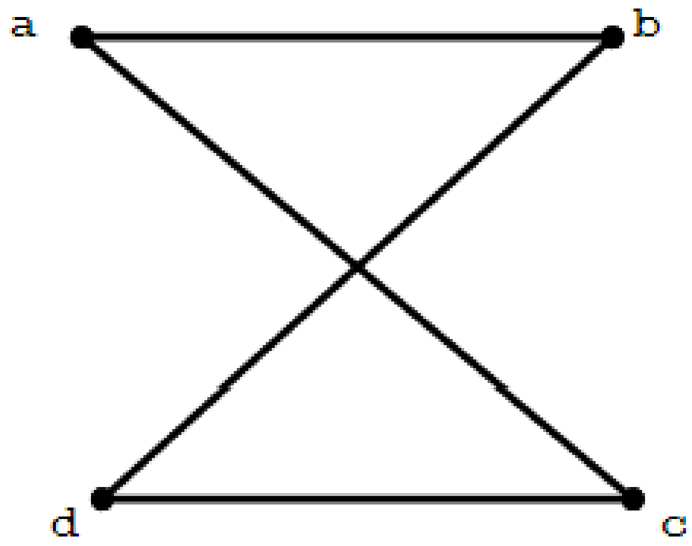
[redacted]

- **Teorem:** Bir basit çizgenin matris ifadesi A matrisi ise, bu durumda i,j=1,2,... için A^n matrisinin ij. bileşeni i. köşeden j. köşeye uzunluğu n olan yolların sayısını verir.

[redacted]

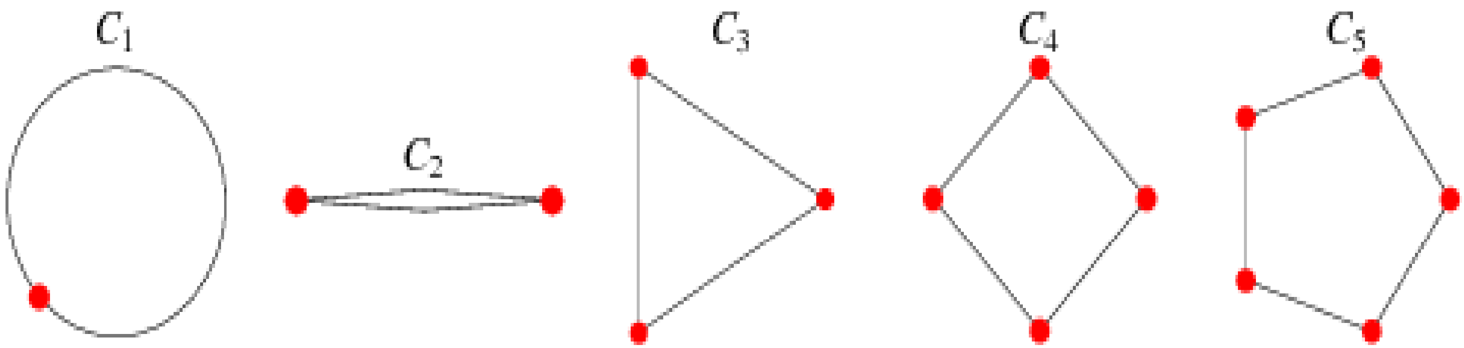
- **Teorem 7.7.1:** Köşelerin v_1 , v_2 , ..., v_n sırasına göre A komşuluk matrisiyle bir çizge G olsun (G çizgesi yönlü ya da yönsüz olabilir, paralel kenar ya da döngü içerebilir). r bir pozitif tamsayı olmak üzere v_i köşesinden v_j köşesine olan uzunluğu r olan birbirinden farklı yolların sayısı A^r matrisinin (i,j) bileşenindeki değerine eşittir.

[redacted]



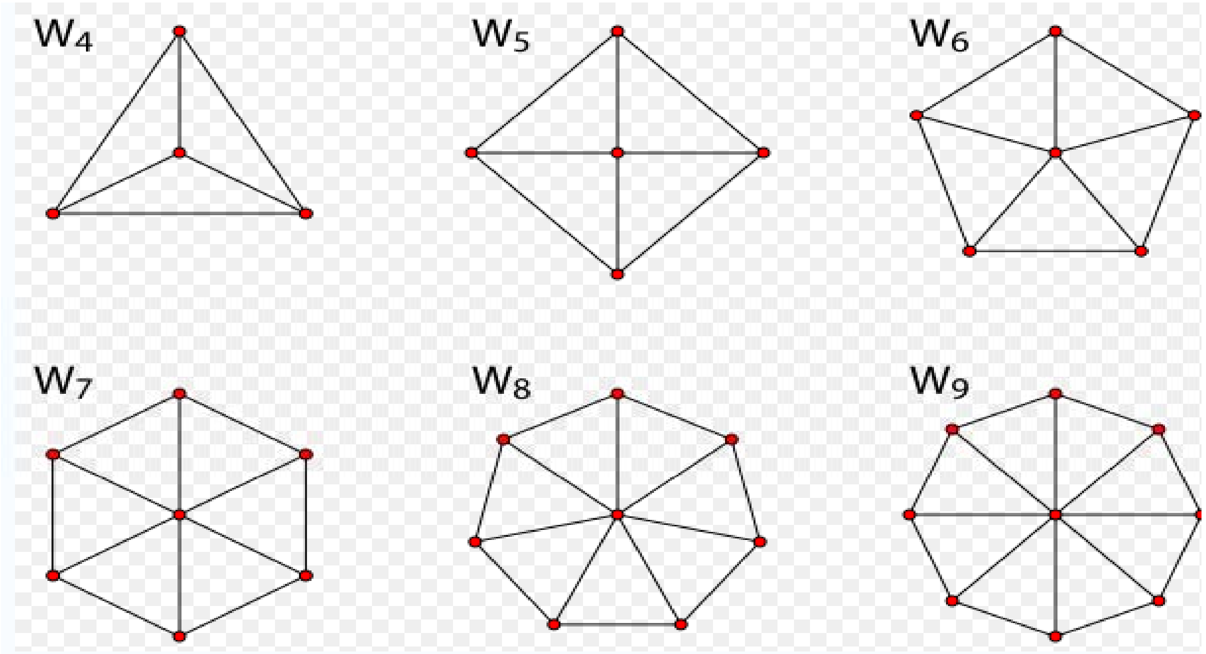
Çevrimler

Tanım: n adet dügüm ve {v1,v2}, {v2,v3}, …, {vn-1,vn}, {vn,v1} köşe çiftlerinden oluşan kenarlardan meydana gelir ve kısaca C_n ile gösterilir.

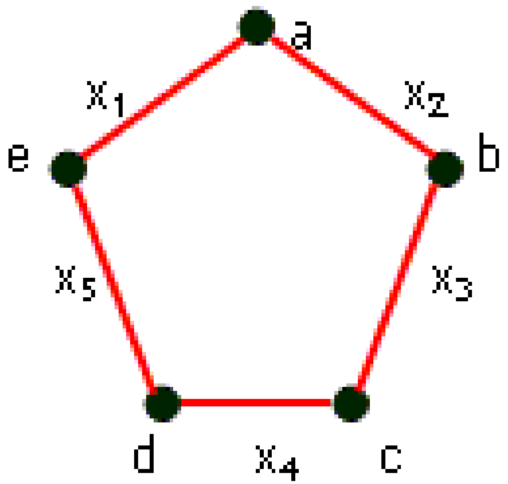


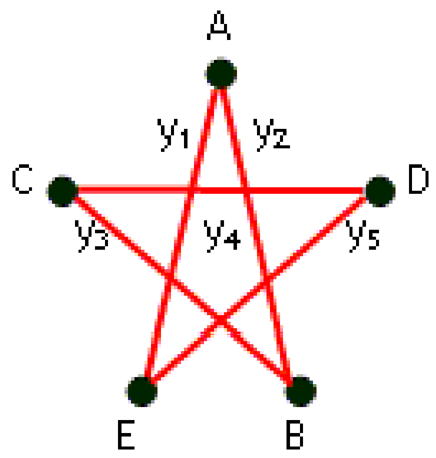
Tekerlek Çizgeler

Tanım: n adet köşeden oluşan ve tek bir köşesinin, bir çevrimin herbir köşesine bir kenarla bağlı olduğu çizgelere **tekerlek çizgeler** denir ve W_n ile gösterilir. N-1 köşe derecesine sahip olan bu özellikli köşeye **göbek köşe** (hub) denir.



Eş Yapılı Çizgeler





$$A_1 = A_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

[redacted]

- **Tanım 7.6.1:** G_1 ve G_2 iki çizge olsunlar. Eğer G_1 çizgesinin köşelerinden G_2 çizgesinin köşelerine birebir, üzerine f fonksiyonu var ve G_1 çizgesinin kenarlarından G_2 çizgesinin kenarlarına birebir, üzerine g fonksiyonu varsa, ve böylece G_1 çizgesinde köşeleri v ve w olan bir e kenarı için gerekli ve yeterli koşul G_2 çizgesinde köşeleri f(v) ve f(w) olan kenar g(e) ise, G_1 ve G_2 çizgelerine *eşyapılıdırlar* denir. f ve g fonksiyonlarına G_1 den G_2 ye *eşyapı dönüşümleri* denir

- **Teorem 7.6.4:** G_1 ve G_2 gibi iki çizgenin eşyapılı olması için gerekli ve yeterli koşul çizgelerin köşelerinin herhangi bir sırasına göre oluşturulan matrislerin eşit olmasıdır

[redacted]

- **Sonuç 7.6.5:** G_1 ve G_2 iki basit çizge olsunlar. Aşağıdaki ifadeler denktir.

  a) G_1 ve G_2 eşyapılıdırlar,

  b) G_1 çizgesinin köşeler kümesinden, G_2 çizgesinin köşeler kümesine aşağıdaki özelliği sağlayan bir f birebir, üzerine fonksiyonu vardır:

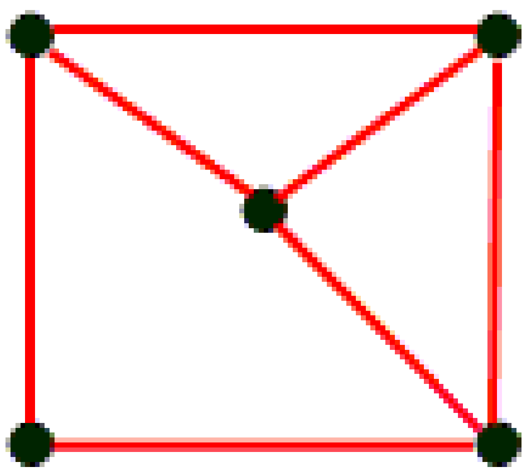
     G_1 çizgesinde v ve w iki köşenin komşu olması için gerekli ve yeterli koşul G_2 çizgesinde de f(v) ve f(w) köşelerinin de komşu olmasıdır.

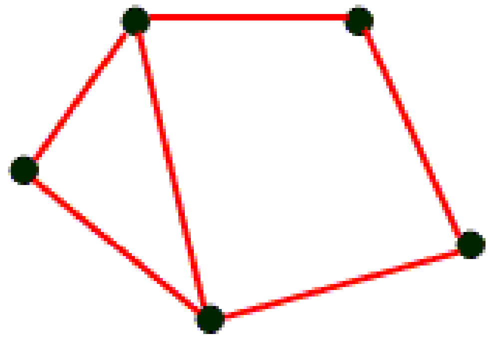
[redacted]

- **Tanım:** Eğer G_1 çizgesi P özelliğine sahip olduğunda G_2 çizgesi de P özelliğine sahipse, bu P özelliğine *değişmez* (invariant) özellikdir denir.

Örnek 7.6.7:

“7 adet kenarı var”
özelliği değişmez
kalmıyor

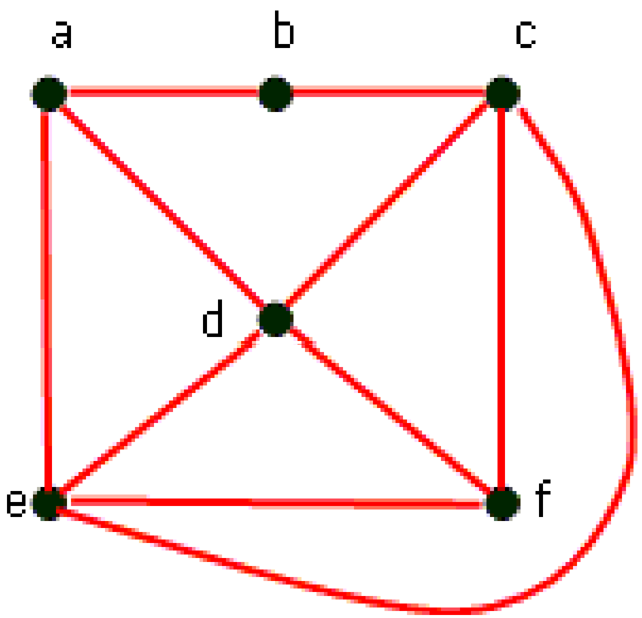


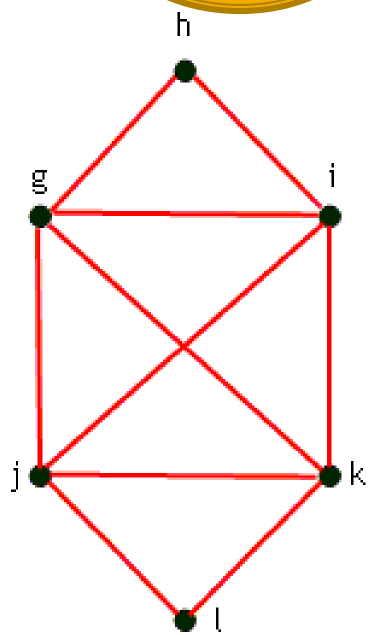


G_2

Örnek 7.6.9:

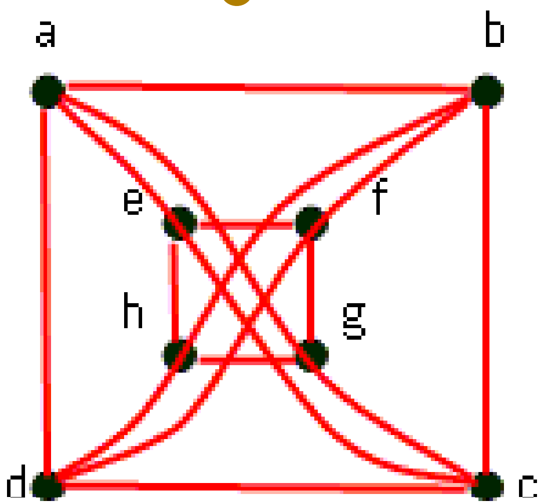
“köşe derecesi 3 olan bir köşe var”
özelliği değişmez kalmıyor
(Eşyapılı Değiller)

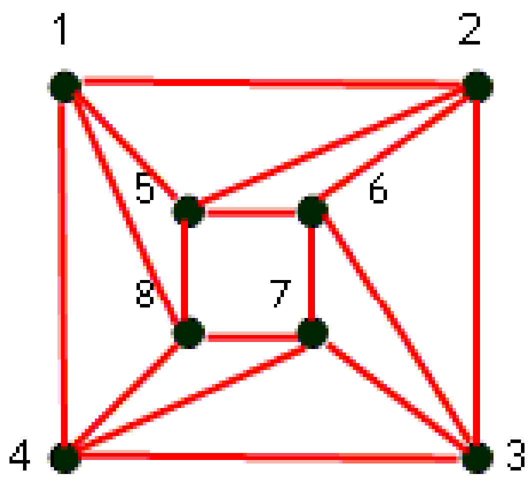




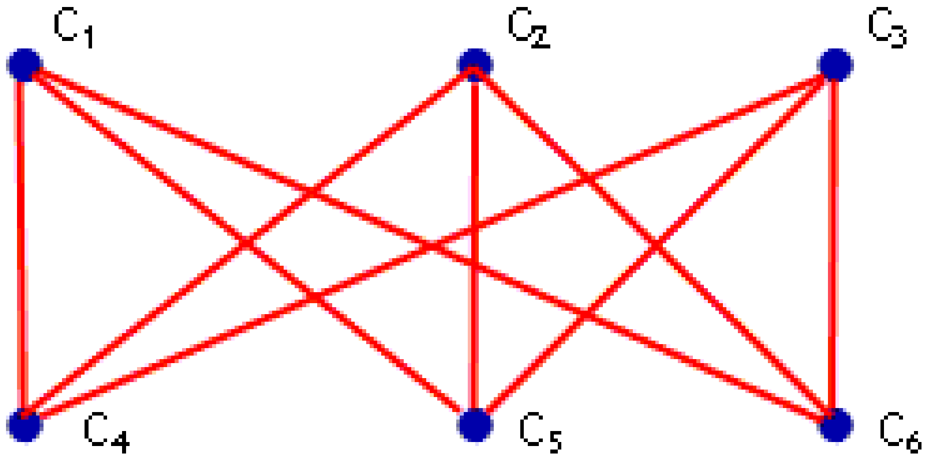
[redacted]

"3 uzunluğunda bir basit çevrim var"
özelliği değişmez
kalmıyor
(Eşyapılı Değiller)





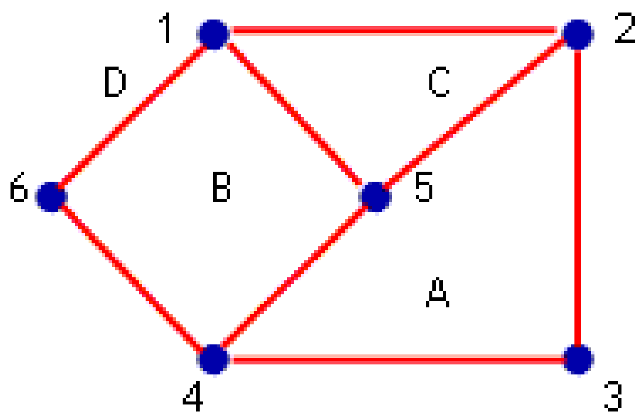
Düzlemsel Çizgeler

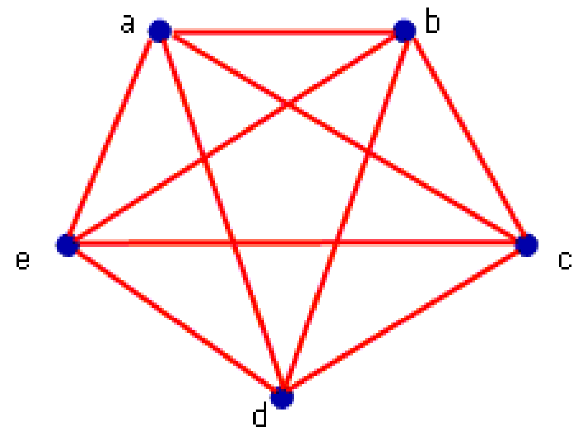


- **Tanım 7.7.1:** Bir çizge kenarları birbirilerini kesmeyecek şekilde çizilebiliyorsa, çizgeye *düzlemsel çizgedir* denir.

[redacted]

K_5 düzlemsel değildir.

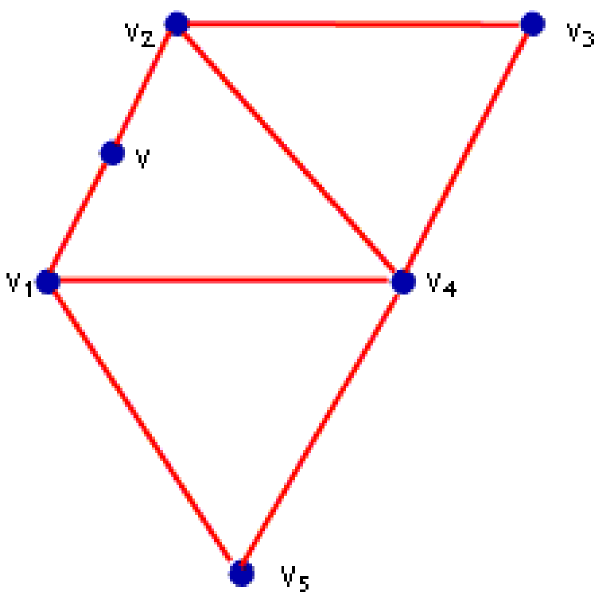




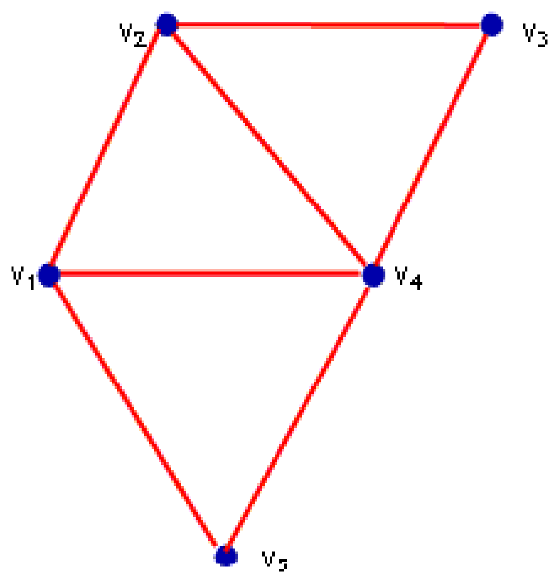
[redacted]

- **Tanım 7.7.3:** Eğer bir G çizgesi derecesi 2 olan bir v köşesine, $v_1 \neq v_2$ olacak şekilde (v,v_1), (v,v_2) kenarlarına sahipse, bu durumda (v,v_1), (v,v_2) kenarlarına *seri içindedir* denir.
- G çizgesinde (v,v_1), (v,v_2) kenarlarını kaldırarak bunlar yerine (v_1,v_2) kenarını yerleştirme işlemine *v köşesine göre seri indirgeme* denir.
- Elde edilen yeni G′ çizgesine G çizgesinden *seri indirgeme yöntemiyle elde edilmiştir* denir

Örnek 7.7.4:



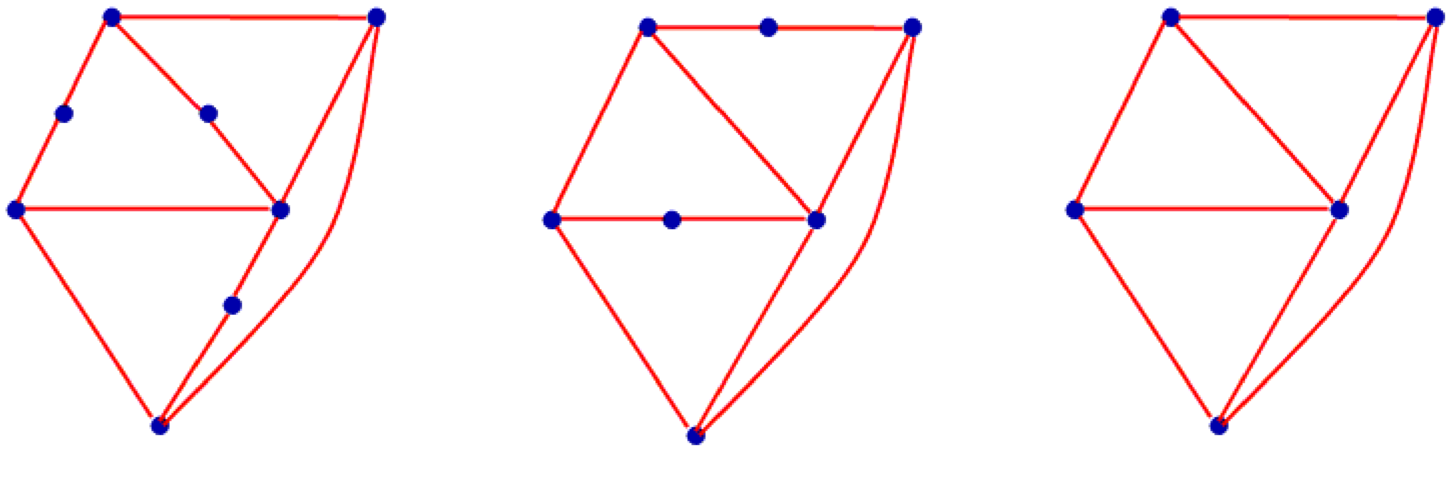
G



G'

[redacted]

- **Tanım 7.7.5:** Eğer G_1 ve G_2 çizgeleri birtakım seriye indirgeme işlemleri sonucunda eşyapılı iseler, bu iki çizgeye *homemorfiktirler* denir.

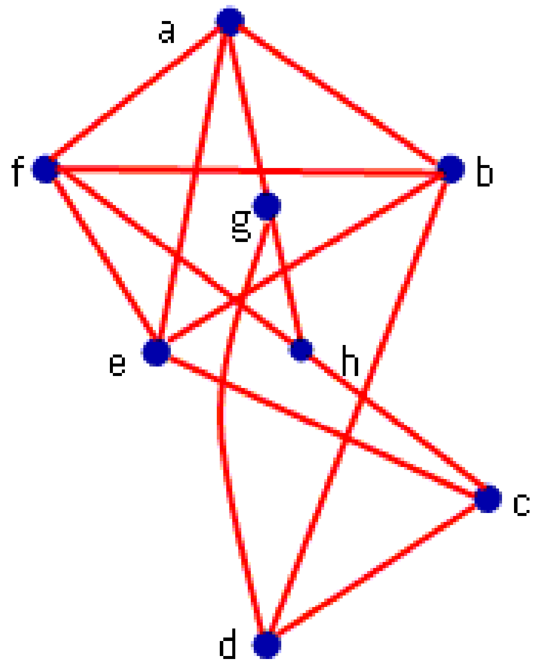


G_1 G_2 G'

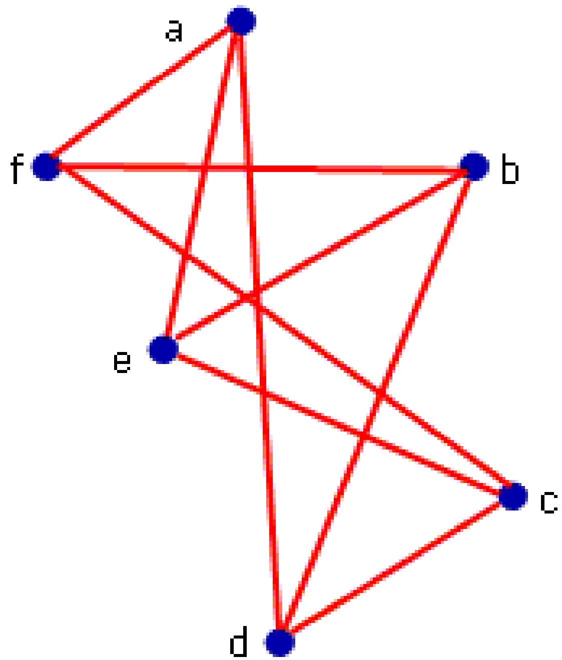
[redacted]

- **Teorem 7.7.7: (Kuratowski Teoremi)** Bir G çizgesinin düzlemsel olması için gerekli ve yeterli koşul çizgenin K_5 ve $K_{3,3}$ çizgelerine homemorf bir altçizge içermemesidir.

Örnek 7.7.8:

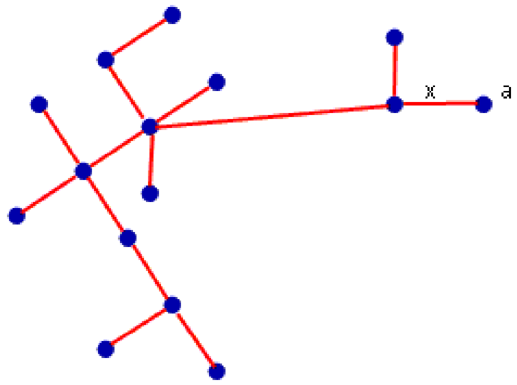


G

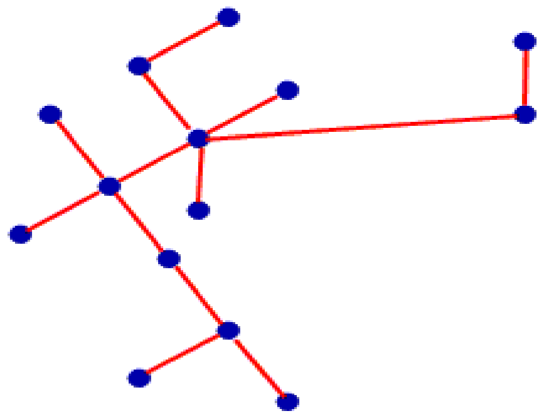


$K_{3,3}$

- **Teorem 7.7.9: (Çizgeler İçin Euler Formulü)** Eğer G çizgesi e adet kenardan, v adet köşeden ve f adet yüzden oluşan bir düzlemsel çizge ise, bu durumda **$f=e-v+2$** olur.



G



G'