BÖLÜM 1

KÜMELER ve MANTIK

Kümeler

Kümeler

- $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi. $\mathbb{Z}$ harfi almanca kökenli (Zahlen)

  $\mathbb{Z}^-$ negatif tamsayılar kümesi,

  $\mathbb{Z}^{nonneg}$ $=\{0,1,2,3,\ldots\}$

  $\overline{\mathbb{Z}^-} = \mathbb{Z}^{nonneg}$

- $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi. $\mathbb{Q}$ quotient

X bir sonlu küme ise,
$|X| =$ X 'deki öğelerin sayısını
gösterir

Ayrık Kümeler

- **Tanım 1.1.1:** X ve Y herhangi iki küme olsunlar. Eğer $X \cap Y = \emptyset$ ise, X ve Y kümelerine *ayrıktırlar* denir.

- Kümelerden oluşan bir S kümesinden alınan herhangi iki küme aralarında ayrıksa, S kümesine *ayrık küme* denir.

De-Morgan Kuralı

- **Teorem 1.1.2**:
  (Kümeler İçin De-Morgan Kuralı)

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B},$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

Önermeler

Önermeler

- **Tanım 1.2.1:** Doğru ya da yanlış bir hüküm bildiren bir ifadeye bir *önerme* (proposition) denir.

- **Tanım 1.2.3:** p ve q birer önerme olsunlar. p ve q önermelerinin $p \wedge q$ ile gösterilen *birleşmesi* (conjuction)

  "p ve q"

  ile verilen önermedir.
- p ve q önermelerinin $p \vee q$ ile verilen *ayırtlamı* (disjunction)

  "p ya da q"

  ile verilen önermedir.

[redacted]

Tanım 1.2.4: p∧q önermesinin doğruluk değerleri

p	**q**	**p∧q**
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

doğruluk tablosu ile verilir.

Tanım 1.2.5: $p \vee q$ önermesinin doğruluk değerleri

p	**q**	**$p \vee q$**
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

doğruluk tablosu ile verilir.

[redacted]

- **Tanım 1.2.6:** Bir p önermesinin $p^{/}$ ile gösterilen **olumsuzlaması** (negation) "*olumsuz p*" ile verilen önermedir. önermesinin doğruluk değerleri

p	$p^{/}$
D	Y
Y	D

doğruluk tablosu ile verilir.

Koşullu Önermeler
ve
Mantıksal Denklik

- **Tanım 1.3.1:** p ve q iki önerme olsun.

  "eğer p ise, q"

  ifadesine bir *koşullu önerme* denir ve bu kısaca $p \rightarrow q$ ile gösterilir.
- Burada p önermesine *hipotez* ve q önermesine *sonuç önerme* denir.

[redacted]

- **Tanım 1.3.2:** $p \rightarrow q$ önermesinin doğruluk değerleri

p	**q**	**$p \rightarrow q$**
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

doğruluk tablosu ile verilir.

- **Tanım 1.3.5:** p ve q iki önerme olsunlar

  “p gerek ve yeter koşul q”

  koşullu önermesine *çift koşullu önerme* denir ve $p \leftrightarrow q$ ile gösterilir.

[redacted]

- p↔q önermesinin doğruluk değerleri

p	**q**	**p↔q**
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

doğruluk tablosu ile verilir.

- **Tanım 1.3.6:** $p_1, p_2, \ldots, p_n$ önermelerinin bileşkesinden oluşan herhangi iki bileşke önerme P ve Q olsunlar.
  $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 'lerin herhangi doğruluk değerleri verildiğinde ya P ve Q önermelerinden her ikisi birden doğru ya da P ve Q önermelerinden her ikisi birden yanlış ise, P ve Q önermelerine *mantıksal denktir* denir ve

  $$P \equiv Q$$

  ile gösterilir.

[redacted]

- **Tanım 1.3.9:** $p \rightarrow q$ koşullu önermesine tam mantıksal denk olan koşullu önermeye *devrik önerme* denir ve bu

$$\overline{q} \rightarrow \overline{p}$$

ile verilir.

Argümanlar
ve
Sonuç Çıkarım Kuralları

[redacted]

- Önermelerin bir dizisinden bir sonuca varma sürecine *tümdengelimli sonuç çıkarma* (deductive reasoning) denir.
- Verilen önermelere *hipotezler* denir.
- Bir *sonuç çıkarma argümanı* bir sonuç ile hipotezlerden oluşur.

[redacted]

- **Tanım 1.4.1:** Bir *argüman*

  $$p_1, p_2, \ldots, p_n \,/\, \therefore q$$

  şeklinde yazılan önermelerin bir dizisidir. Burada $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ‘lere hipotezler ve q ‘ya da bir *sonuç* denir.
- Eğer $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ‘lerin hepsi doğru olduğunda q önermesi de doğru ise *argüman geçerlidir*. Aksi halde argüman geçersizdir.

Önermeler İçin Sonuç Çıkarım (Inference) Kuralları

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore q \end{array}$$

argümanı geçerli bir argümandı. Bu tür sonuç çıkarma kuralına *ayrılabilme kuralı* (low of detachment) ya da *koygu kuralı* (modus ponens) denir

TABLO

Sonuç Çıkarım Kuralları		
Hangisinden	**Türetilebilir**	**Kural Adı**
$P, P \rightarrow Q$	Q	Modus ponens - mp
$P \rightarrow Q, Q^{/}$	$P^{/}$	Modus tollens - mt
P, Q	$P \wedge Q$	Birleşim
$P \wedge Q$	P, Q	Basitleştirme
P	$P \vee Q$	Toplama

[redacted]

Niceleyiciler

[redacted]

- **Tanım 1.4.1:** D bir küme ve $x \in D$ değişkenine bağlı bir ifade $P(x)$ olsun.
  Eğer herbir x için $P(x)$ bir önermeyse, P'ye bir önerme fonksiyonu denir.

[redacted]

- **Tanım 1.4.2:** Bir D tanım kümesiyle önerme fonksiyonu P olsun.

  her x için P(x)

  deyimine *evrensel niceleyici deyim* denir.
- Bu deyim

  $\forall x\, P(x)$

  şeklinde de yazılabilir.
- Eğer her $x \in D$ için P(x) doğru ise $\forall x\, P(x)$ doğrudur

- **Tanım 1.4.3:** D tanım kümesinden alınan <u>en az bir</u> x için P(x) yanlış ise, buna “her x için P(x)” ifadesinin bir *karşıt örneği* (counterexample) denir.
- D kümesinden alınan <u>en az bir</u> x için P(x) doğru bir önerme ise, bu durumda “D kümesinden alınan bazı x ‘ler için P(x)” ifadesi doğrudur.

[redacted]

- **Tanım 1.4.4:** D tanım kümesiyle bir önerme fonksiyonu P olsun.

  bir x için P(x)

  deyimine *varlıksal niceleyici deyim* denir.
- Bu deyim kısaca

  $\exists x\, P(x)$

  şeklinde de yazılabilir

- **Örnek 1.4.5:** Bazı x gerçel sayıları için

$$\frac{x}{x^2+1}=\frac{2}{5}$$

ifadesi doğrudur, çünkü x=2 için

$$\frac{2}{2^2+1}=\frac{2}{5}$$

olmaktadır.

Genelleştirilmiş De Morgan Kuralı

- **Teorem I.4.6:** P bir önerme fonksiyonu olsun. Aşağıda (a) ve (b) ‘de verilen her bir önerme çifti aynı doğruluk değerlerine sahiptir.

  a) $(\forall x P(x))'$; $\exists x P'(x)$

  b) $(\exists x P(x))'$; $\forall x P'(x)$

[redacted]

- **Örnek 1.4.7:**

  “Bazı kuşlar uçamaz”

  P(x): “x uçabilir”

  $$\exists x P'(x)$$

  De Morgan Kuralına göre

  $(\exists x P'(x))' = \forall x P''(x) = \forall x P(x)$

  “Her kuş uçabilirdir”

[redacted]

- **Örnek 1.5.8:**
  Bir P önerme fonksiyonunun tanım kümesi {-1,0,1} olsun.

$$\forall x P(x) \quad \rightarrow \quad P(-1) \wedge P(0) \wedge P(1)$$

$$\exists x P(x) \quad \rightarrow \quad P(-1) \vee P(0) \vee P(1)$$

Niceleyici Deyimler için Sonuç Çıkarım Kuralları

- Kabul edelim ki, $\forall x \in D P(x)$ doğru olsun. Bu durumda D kümesinden alınan her x için P(x) önermesi doğrudur.
- Özellikle, eğer D kümesinde bir öğe d ise, bu durumda P(d) önermesi de doğrudur. Böylece gördük ki,

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore \text{eğer } d \in D \ P(d)}$$

argümanı geçerlidir. Bu sonuç çıkarım kuralına *evrensel özelleştirme* denir.

TABLO

Sonuç Çıkarım Kuralları		
Nereden	**Türetilebilir**	**Kural Adı**
$(\forall x)P(x)$	t bir değişken ya da sembolik sabit olmak üzere P(t)	Evrensel özelleştirme -eö
$(\exists x)P(x)$	a daha önce kanıt dizisinde kullanılmamış olan bir sembolik sabit olmak üzere P(a)	Varlıksal özelleştirme – vö
P(x)	$(\forall x)P(x)$	Evrensel genelleştirme -eg
P(x) ya da a bir sembolik sabit olmak üzere P(a)	$(\exists x)P(x)$	Varlıksal genelleştirme -vg

[redacted]

- **Örnek 1.5.10:**

  "Her x gerçel sayısı için, eğer x bir tamsayı ise bu durumda x bir rasyonel sayıdır. $\sqrt{2}$ sayısı rasyonel değildir. Bu sebeple $\sqrt{2}$ bir tamsayı değildir."

  Eğer

  P(x): "x bir tamsayıdır"

  Q(x): "x rasyoneldir"

  alınırsa argüman şöyle olur:

$$\forall x \mathbb{R}(P(x) \rightarrow Q(x))$$
$$Q^{/}(\sqrt{2})$$
$$\text{-------------------------}$$
$$\therefore P^{/}(\sqrt{2})$$

[redacted]

$$\forall x \mathbb{R}(P(x) \to Q(x))$$
$$Q'(\sqrt{2})$$

$$\therefore P'(\sqrt{2})$$

evrensel özelleştirmeyle $P(\sqrt{2}) \to Q(\sqrt{2})$

atkı kuralı (modus tollens) ile $P'(\sqrt{2})$

argüman geçerlidir.

$P \to Q$ ve Q' ise, P'

- **Örnek 1.5.11:**

“Herkez ya elma ya da portakal sever. Emre elma sevmez”

P(x) : “x elma sever”
Q(x): “x portakal sever”

İlk hipotez: $\forall x P(x) \vee Q(x)$
Evrensel özelleştirme ile $P(emre) \vee Q(emre)$

İkinci hipotez $P^{/}(emre)$
Ayrışma kıyaslama sonuç çıkarma kuralına göre Q(emre)

Yani “emre portakal sever”.

İçiçe Niceleyiciler

“İki pozitif gerçel sayının toplamı pozitifdir”

- Bu ifadeyi sembolik olarak yazmaya çalışalım. Eğer $x>0$ ve $y>0$ ise $x+y>0$ dır. Ama burada iki pozitif gerçel sayı var olduğundan iki adet niceleyici kullanmalıyız.

  $P(x,y)$: $(x>0)(y>0) \rightarrow (x+y>0)$

  alınırsa, ifade sembolik olarak

  $$\forall x \forall y P(x,y)$$

  şeklinde yazılabilir.

[redacted]

- Çok sayıda niceleyici kullanılmasına *içiçe niceleyiciler* denir.

- **Örnek 1.6.1:**
  "Herkez birilerini sever"
  L(x,y): "x, y 'yi sever"

$$\forall x \exists y L(x, y)$$