1 Düğüm, link nedir? Düğüm diyagramları, düğüm izotopisi, temel kavramlar.

1.1 Manifoldlar

Topoloji: Sürekli deformasyonlar altında aynı kalan objeleri inceleyen matematiğin bir dalıdır. Bu tip objelere izotopik objeler denir. İzotopik objeler, geometrik olarak farklı fakat topolojik olarak aynılardır.
Sürekli fonksiyon: $f : X \to Y$ iki topolojik uzay X ve Y arasında verilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall A \subset Y$ açık kümeleri için $f^{-1}(A) \subset X$ kümesi açık bir küme ise f fonksiyonuna *sürekli fonksiyon* denir.
Homeomorfizma: İki topolojik uzay arasında verilen $f : X \to Y$ fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve tersi f^{-1} de sürekli ise f fonksiyonuna *homeomorfizma* denir. X ve Y topolojik uzaylarına *homeomorfik uzaylar* denir. X ve Y uzayları homeomorfik ise X ve Y uzaylarına topolojik olarak *denk uzaylar* denir.

Örnek 1. (a, b) açık aralığı $(0, 1)$ açık aralığına homeomorfiktir. Aşağıda verilen f fonksiyonu bir homeomorfizmadır.

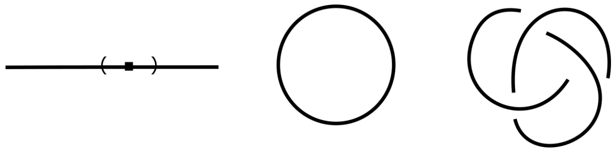
$$f : (a, b) \to (0, 1)$$
$$f(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

Ödev 1. $(0, 1)$ aralığının $\mathbb{R}$'ye homeomorfik olduğunu gösteriniz.

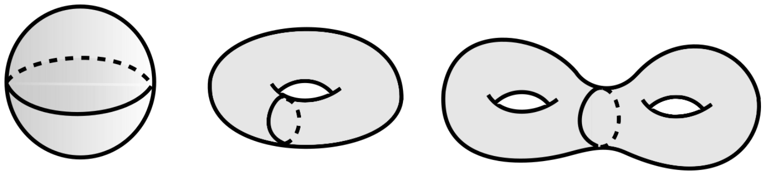
Tanım 1. Eğer n-boyutlu bir topolojik M uzayı; Hausdorff, ikili sayılabilir (sayılabilir bazı vardır) ve lokal olarak her bir noktasının komşuluğu $\mathbb{R}^n$'deki bir noktanın komşuluğuna homeomorfik ise bu topolojik uzaya n-boyutlu manifold denir. Lokal olarak n-boyutlu M manifoldu $\mathbb{R}^n$'ye benzemektedir.

Örnek 2. Eğriler/ düğümler 1-manifold örnekleridir. Şekil 1'de kompakt olmayan 1-manifold olarak $\mathbb{R}$, kompakt 1-manifoldlara ise çözük düğüm ve trefoil düğümü sırasıyla örnek olarak verilmiştir.

Örnek 3. Yüzeyler 2-manifold örnekleridir. Şekil 2'de kompakt yüzeylere örnek olarak 2-küre S^2, torus yüzeyi T^2 ve cinsi 2 olan yüzey Σ_2 sırasıyla verilmiştir. Bir yüzeyin *cins sayısı* yüzeyin delik sayısıdır. Bu durumda, 2-küre S^2'nin cinsi 0, torus yüzeyi T^2'nin cinsi ise 1'dir.

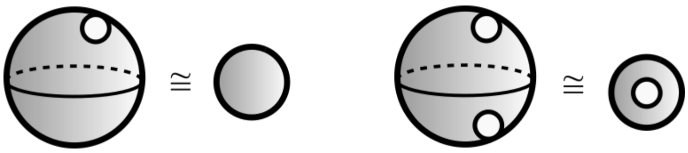


Şekil 1: $\mathbb{R}$, çözük düğüm S^1, trefoil.



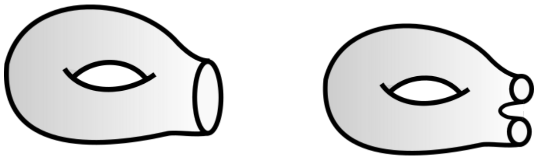
Şekil 2: Küre S^2, torus T^2, cinsi 2 olan yüzey Σ_2.

Örnek 4. Sınırlı yüzeylere örnek olarak Şekil 3'te 1-sınır bileşenine sahip olan 2-küre S^2 ve 2-sınır bileşenine sahip 2-küre S^2 verilmiştir. 1-sınır bileşenine sahip olan 2-küre S^2 diske, 2-sınır bileşenine sahip olan 2-küre S^2 ise halkaya homeomorfiktir. Şekil 4'te ise 1-sınır bileşenli ve 2-sınır bileşenli torus T^2 örnek olarak verilmiştir.



Şekil 3: Sınır bileşenlerine sahip 2 küre S^2.

Örnek 5. $\mathbb{R}^3$ ve S^3 en bilinen 3-manifold örnekleridir. 3-manifoldlar, eğriler ve yüzeylere göre gözümüzde daha zor canlandırılır.

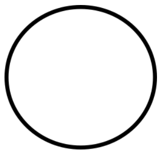


Şekil 4: 1-sınır bileşenli ve 2-sınır bileşenli torus T^2.

1.2 Düğüm Teorisine Giriş

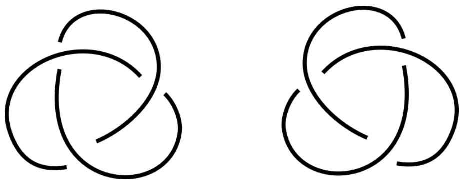
Tanım 2. Birim çember $S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$'e homeomorfik olan $\mathbb{R}^3$'ün alt kümelerine *düğüm* denir.

Örnek 6. En basit düğüm örneği Şekil 5'te verilen çözük düğümdür.



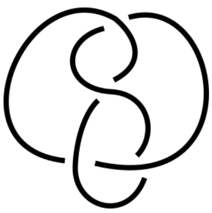
Şekil 5: Çözük düğüm.

Örnek 7. Şekil 6'da sırasıyla verilen sağ trefoil ve sol trefoil düğümleri çözük düğümden sonraki en basit düğüm örnekleridir.



Şekil 6: Sağ trefoil ve sol trefoil düğümü.

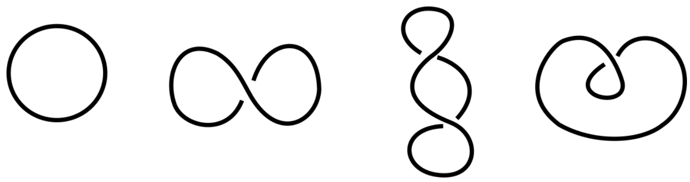
Örnek 8. Şekil 7'de örnek olarak verilen düğüm Sekiz düğümüdür.



Şekil 7: Sekiz düğümü.

Düğümler, $K \subset \mathbb{R}^3$ uzayının içerisindedir. Düğümlerin Şekil 5, Şekil 6 ve Şekil 7'de çizdiğimiz resimleri aslında **xz**-düzlemine olan izdüşümleridir. $\mathbb{R}^3$ uzayı içerisindeki bir düğümün **xz**-düzlemine olan izdüşümüne *düğüm diyagramı* denir. Bir düğümün birden fazla izdüşümü yani birden fazla diyagramı olabilir.

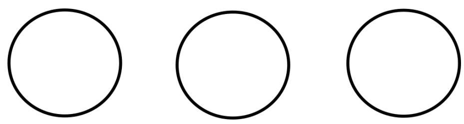
Örnek 9. Şekil 8'de çözük düğümün farklı izdüşümleri yani farklı diyagramları verilmiştir. Verilen diyagramların hepsinin neden çözük düğüm olduğunu ilerleyen bölümlerde öğreneceğiz.



Şekil 8: Çözük düğümün birden fazla izdüşümü.

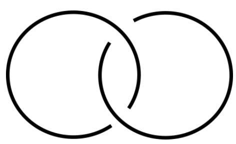
Tanım 3. Düğümlerin ayrık birleşimlerine *link* denir. Linki oluşturan her bir düğüme linkin bir *bileşeni* denir.

Örnek 10. Üç çözük düğümün birleşiminden oluşan linke 3-bileşenli çözük link denir ve U_3 ile gösterilir. Şekil 9'da U_3 linkinin diyagramı verilmiştir.



Şekil 9: 3-bileşenli çözük link U_3.

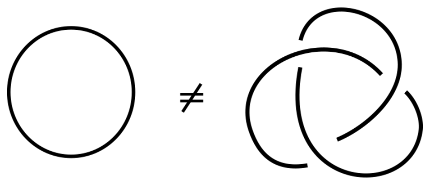
Örnek 11. Çözük linkten sonra en basit link örneği Hopf linktir, Şekil 10'da verilmiştir.



Şekil 10: Hopf link.

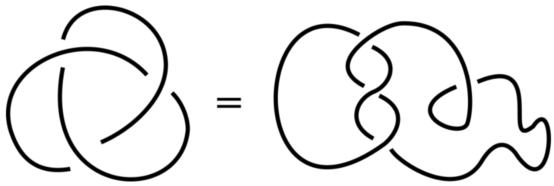
Bu derste temel olarak aşağıdaki iki sorunun cevabına yanıt verilecektir.

Soru 1. *Verilen iki düğümün birbirinden farklı olduğu nasıl anlaşılır? Örneğin, Şekil 11'de verilen çözük düğümün ve trefoil düğümünün birbirinden farklı olduğu sonucu nasıl elde edilir?*



Şekil 11: Çözük düğüm ve trefoil düğümü.

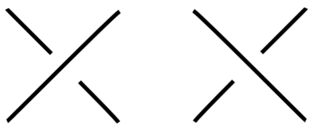
Soru 2. *Bir düğüm için verilen birden fazla diyagramın aynı düğüm için olduğu sonucu nasıl elde edilir? Örneğin, Şekil 12'de verilen standart bir trefoil diyagramı ile standart olmayan bir diyagramının aynı olduğu sonucu nasıl elde edilir?*



Şekil 12: Trefoil düğümünün iki diyagramı.

Tanım 4. Verilen bir düğüm diyagramındaki yayların birbiri üzerinden geçtiği yerlere *düğüm çaprazlaması* denir.

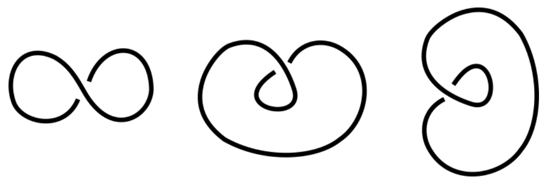
Bir düğüm diyagramında görülebilecek çaprazlamalar Şekil 13'te verilmiştir. Şekil 13'teki diyagramlarda sol alt köşeden başlayarak yayın üzerinde hareket edildiği düşünülürse ilk diyagramda yay üsten geçerken ikinci diyagramda yay alttan geçmektedir.



Şekil 13: Düğüm diyagramındaki çaprazlamalar.

Eğer bir düğüm diyagramının tek bir çaprazlaması varsa bu düğüm çözük düğümdür. Bu durumun kısa ispatını yapalım. Şekil 13'te verilen çaprazlamalardan biri seçilsin. Şekil 14'te, seçilen çaprazlama düğüm olacak ve tek çaprazlamaya sahip olacak şekilde yayların birleştirilmesi ile elde edilebilecek durumlar verilmiştir. Elde edilen tüm durumlardan çözük düğüm gelir. Diğer çaprazlama seçildiğinde ise Şekil 14'te elde edilen durumların aynadaki görüntüsü elde edilir ve bu durumlardan da yine çözük düğüm gelir.

Ödev 2. İki çaprazlamaya sahip her düğümün çözük düğüm olduğunu gösteriniz.



Şekil 14: Tek bir çaprazlamaya sahip düğüm çözük düğümdür.

Çözük düğümden farklı olan düğümlere *aşikar olmayan düğüm* denir. Bir düğümün aşikar olmayan bir düğüm olması için çaprazlama sayısının en az 3 olması gerekir. Örneğin, trefoil düğümünün 3 çaprazlamaya sahip düğüm diyagramı vardır. 3'ten daha fazla çaprazlamaya sahip olan diyagramları olmasına rağmen 3'ten daha az olan yoktur. Trefoil düğümü aşikar olmayan düğümdür.

Eğer bir düğümün diyagramında sabitlenen bir yönde ilerlendiğinde çaprazlamalarda düğümün yayı bir aşağı yay bir yukarı yay olacak şekilde ya da bir yukarı yay bir aşağı yay olacak şekilde değişiyorsa bu düğüme *dalgalanan düğüm* denir.

Örnek 12. Şekil 15'te verilen sağ trefoil düğümü dalgalanan düğüme örnektir.

Şekil 15: Sağ trefoil düğümü.

1.3 Alıştırmalar

1. Çözük düğümün birbirinden farklı 3 izdüşümünü çiziniz.

2. Sol trefoil düğümünün birbirinden farklı 3 izdüşümünü çiziniz.

3. Sekiz düğümünün 8 çaprazlamaya sahip diyagramını çiziniz.

4. Verilen herhangi bir düğümün 100'den fazla çaprazlamaya sahip diyagramının bulunabileceğini gösteriniz.

Kaynaklar

[1] A. Adams, **The knot book, an elementary introduction to the mathematical theory of knots**, American Mathematical Society.

[2] Murasugi K. (1996). **Knot theory and its applications**, Birkhauser Boston.

[3] Rolfsen, D. (1976). **Knots and links**, Berkeley, California: Publish or Perish Press.