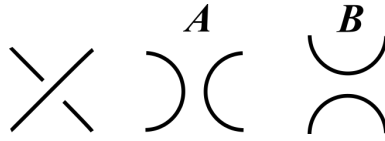


1 Dügüm Polinomları: Kauffman braketi, Kauffman braket polinomu

1.1 Kauffman braketi ve Kauffman braket polinomu

1.1.1 Kauffman braketi

Verilen bir düğüm diyagramının her bir çaprazlaması için Şekil 1'de verilen A ve B olmak üzere iki tip ayırma vardır. Dügüm diyagramının S durumu, diyagramın her bir çaprazlama-



Şekil 1: A tipi ve B tipi ayırma.

sının ayrılması ile elde edilir. Toplam n tane çaprazlaması olan bir düğüm diyagramının 2^n tane S durumu vardır.

Verilen D diyagramının S durumu için;

$$a = A \text{ tipi toplam ayırma sayısı}$$

$$b = B \text{ tipi toplam ayırma sayısı}$$

olsun. $\langle D|S \rangle = t^{a-b}$ olarak tanımlansın. Bir D diyagramının S durumundaki toplam bileşen(parça) sayısı $|s|$ ise bir D diyagramının *Kauffman Braketi*

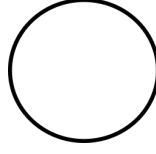
$$\langle D \rangle = \sum_S \langle D|S \rangle (-t^{-2} - t^2)^{|s|-1}$$

olarak tanımlanır. Bir düğümün Kauffman braket polinomu Kauffman braketini kullanarak tanımlayacağız.

Örnek 1. Şekil 2'de verilen çözüük düğüm diyagramının Kauffman braketini hesaplayalım. Verilen çözüük düğüm diyagramı, çaprazlama içermediği için toplam S durumu sayısı $2^0 = 1$ dir. Çözüük düğüm diyagramı için tek bir S durumu vardır ve kendisidir. Çözüük düğüm çaprazlama içermediğinden A tipi ve B tipi ayırma yoktur. Bu durumda $a = 0$, $b = 0$ ve durumun toplam bileşen sayısı $|s| = 1$ dir. Şekil 2'de verilen çözüük düğümün Kauffman braketini

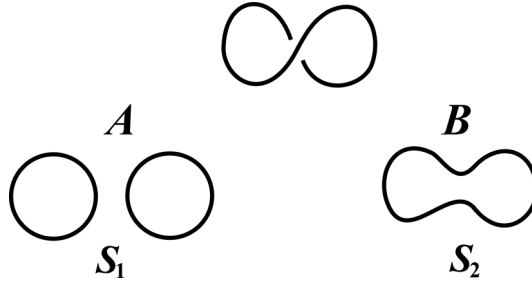
$$\langle D \rangle = \langle D|S \rangle (-t^{-2} - t^2)^{|s|-1} = t^{0-0} (-t^{-2} - t^2)^{1-1} = 1$$

olarak hesaplanır.



Şekil 2: Çaprazlamasız çözükle düğüm diyagramı.

Örnek 2. Şekil 3'te verilen çözükle düğümün Kauffman braketini hesaplayalım. Verilen çözükle düğüm diyagramının 1 tane çaprazlaması olduğundan toplam S durumu sayısı $2^1 = 2$ dir ve Şekil 3'te verilmiştir. Çözükle düğüm diyagramının S_1 durumu için $a = 1, b = 0$ ve S_1 durumunun toplam bileşen sayısı $|S_1| = 2$ 'dir. Çözükle düğüm diyagramının S_2 durumu için $a = 0, b = 1$ ve S_2 durumunun toplam bileşen sayısı $|S_2| = 1$ 'dir.



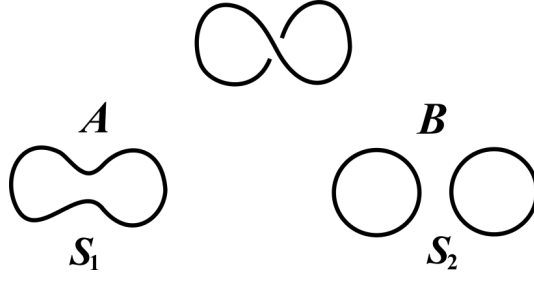
Şekil 3: Çözükle düğüm diyagramı.

Şekil 3'te verilen çözükle düğüm diyagramının Kauffman braketini

$$\begin{aligned}
 \langle D \rangle &= \langle D|S_1 \rangle (-t^{-2} - t^2)^{|S_1|-1} + \langle D|S_2 \rangle (-t^{-2} - t^2)^{|S_2|-1} \\
 &= t^{1-0}(-t^{-2} - t^2)^{2-1} + t^{-1}(-t^{-2} - t^2)^{1-1} \\
 &= -t^{-1} - t^3 + t^{-1} \\
 &= -t^3
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 3. Şekil 4'te verilen çözükle düğümün Kauffman braketini hesaplayalım. Verilen çözükle düğüm diyagramının 1 tane çaprazlaması olduğundan toplam S durumu sayısı $2^1 = 2$ dir ve Şekil 4'te verilmiştir. Çözükle düğüm diyagramının S_1 durumu için $a = 0, b = 1$ ve S_1 durumunun toplam bileşen sayısı $|S_1| = 1$ 'dir. Çözükle düğüm diyagramının S_2 durumu için $a = 0, b = 1$, ve S_2 durumunun toplam bileşen sayısı $|S_2| = 2$ 'dir. Şekil 4'de verilen çözükle



Şekil 4: Çözük düğüm diyagramı.

düğüm diyagramının Kauffman braketi

$$\begin{aligned}
 \langle D \rangle &= \langle D|S_1 \rangle (-t^{-2} - t^2)^{|S_1|-1} + \langle D|S_2 \rangle (-t^{-2} - t^2)^{|S_2|-1} \\
 &= t^{1-0}(-t^{-2} - t^2)^{1-1} + t^{-1}(-t^{-2} - t^2)^{2-1} \\
 &= t - t^{-3} - t \\
 &= -t^{-3}
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Sonuç 1.1. Yukarıdaki üç örnekte de çözük düğüm olmasına rağmen Kaufmann braketleri farklı çıktı. O halde Kaufmann braketi düğüm değişmezi değildir.

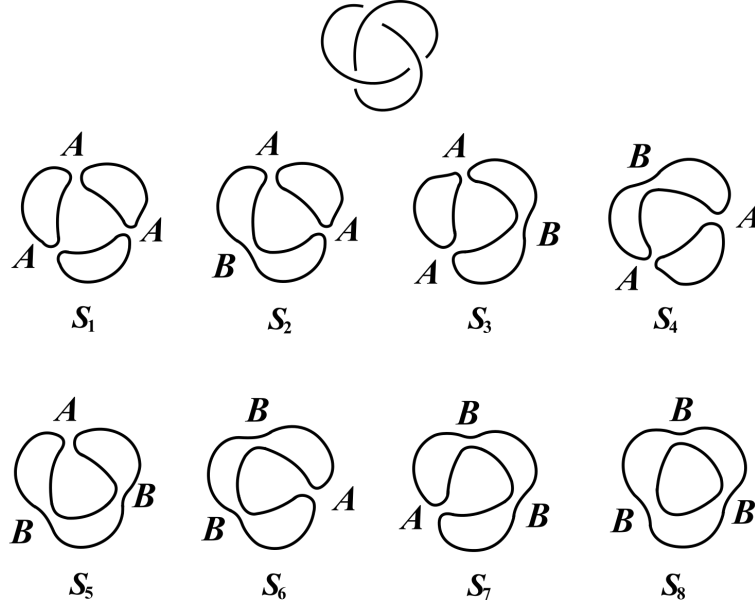
Aslında, Kaufmann braketi R_2 ve R_3 Reidemeister hareketleri altında sabit kalırken R_1 Reidemeister hareketi altında sabit kalmaz. Bu nedenle düğümler için bir değişmez değildir.

Ödev 1. Şekil 5'te verilen çözük düğümün Kauffman braketini hesaplayınız.



Şekil 5: Çözük düğümü.

Örnek 4. Şekil 6'da verilen sol trefoil düğümü ve sol trefoil düğüm diyagramının 8 durumu için Kauffman braketini hesaplayalım. Verilen sol trefoil düğüm diyagramının 3 tane çaprazlaması olduğundan toplam S durumu sayısı $2^3 = 8$ 'dir. S_1 durumu için $a = 3$, $b = 0$ ve toplam bileşen sayısı $|S_1| = 3$, S_2 durumu için $a = 2$, $b = 1$ ve $|S_2| = 2$, S_3 durumu için $a = 2$, $b = 1$ ve $|S_3| = 2$, S_4 durumu için $a = 2$, $b = 1$ ve $|S_4| = 2$, S_5 durumu için $a = 1$, $b = 2$ ve $|S_5| = 1$, S_6 durumu için $a = 1$, $b = 2$ ve $|S_6| = 2$, S_7 durumu için $a = 1$, $b = 2$ ve $|S_7| = 1$, S_8 durumu için $a = 0$, $b = 3$ ve $|S_8| = 2$ dir.



Şekil 6: Sol trefoil düğümünün Kauffmann braketi.

Şekil 6'da verilen sol trefoil düğüm diyagramının Kauffman braketi

$$\begin{aligned}
\langle D \rangle &= \sum_{i=1}^8 \langle D|S_i \rangle (-t^{-2} - t^2)^{|S_i|-1} \\
&= t^{3-0}(-t^{-2} - t^2)^{3-1} + t^{2-1}(-t^{-2} - t^2)^{2-1} + t^{2-1}(-t^{-2} - t^2)^{2-1} \\
&\quad + t^{2-1}(-t^{-2} - t^2)^{2-1} + t^{1-2}(-t^{-2} - t^2)^{1-1} + t^{1-2}(-t^{-2} - t^2)^{1-1} \\
&\quad + t^{1-2}(-t^{-2} - t^2)^{1-1} + t^{0-3}(-t^{-2} - t^2)^{2-1} \\
&= t^3(-t^{-2} - t^2)^2 + 3t(-t^{-2} - t^2) + 3t^{-1} + t^{-3}(-t^{-2} - t^2) \\
&= t^3(t^{-4} + 2 + t^4) - 3t^{-1} - 3t^3 + 3t^{-1} - t^{-5} - t^{-1} \\
&= -t^{-5} - t^3 + t^7 \text{ olarak hesaplanır.}
\end{aligned}$$

1.1.2 Kauffman braket polinomu

Yönlü bir düğüm ya da link L 'nin diyagramı D olsun. Yönlü D diyagramının $\langle D \rangle$ Kauffman braketi ve

p = toplam pozitif çaprazlama sayısı,

n = toplam negatif çaprazlama sayısı

ise verilen düğüm ya da link L 'nin *Kauffman braket polinomu*

$$F_L(t) = (-t)^{-3(p-n)} \langle D \rangle$$

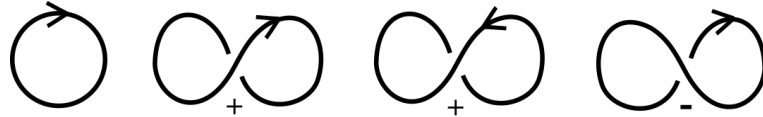
olarak tanımlıdır.

Kauffman braket polinomu R_1, R_2 ve R_3 Reidemeister hareketleri altında sabit kaldığı için düğüm/link için bir değişmezdir. Eğer L bir düğüm ise Kauffman braket polinomu $F_L(t)$ düğümün yönünden bağımsızdır. Diğer taraftan eğer L bir link ise yönü önemlidir.

Örnek 5. Çözük düğümün Şekil 7'de verilen dört diyagramını da kullanarak Kauffman braket polinomunu sırasıyla hesaplayalım. Şekil 7'de verilen ilk diyagramın Kauffman braketi Örnek 1'de $\langle D \rangle = 1$ olarak hesaplandı. Bu durumda çözük düğümün diyagramı çaprazlamaya sahip olmadığından pozitif çaprazlama sayısı $p = 0$ ve negatif çaprazlama sayısı $n = 0$ 'dır ve Kauffman braket polinomu $F_L(t) = (-t)^{-3(p-n)} \langle D \rangle = (-t)^{-3(0-0)} 1 = 1$ 'dir.

Şekil 7'de verilen ikinci ve üçüncü diyagramın Kauffman braketi Örnek 2'de $\langle D \rangle = -t^3$ olarak hesaplandı. İkinci ve üçüncü diyagram durumunda çözük düğüm diyagramının pozitif çaprazlama sayısı $p = 1$ ve negatif çaprazlama sayısı $n = 0$ 'dır ve Kauffman braket polinomu $F_L(t) = (-t)^{-3(p-n)} \langle D \rangle = (-t)^{-3(1-0)} (-t^3) = 1$ olarak hesaplanır.

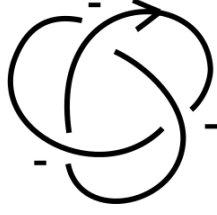
Şekil 7'de verilen dördüncü diyagramın Kauffman braketi Örnek 3'te $\langle D \rangle = -t^{-3}$ olarak hesaplandı. Dördüncü diyagram durumunda çözük düğüm diyagramının pozitif çaprazlama sayısı $p = 0$ ve negatif çaprazlama sayısı $n = 1$ 'dir ve Kauffman braket polinomu $F_L(t) = (-t)^{-3(p-n)} \langle D \rangle = (-t)^{-3(0-1)} (-t^{-3}) = 1$ olarak hesaplanır. Verilen diyagramlar için aynı Kauffman braket polinomunu bulmamız rastlantı değildir. Kauffman braket polinomu düğüm için bir değişmez olduğundan düğüm diyagramından bağımsızdır.



Şekil 7: Çözük düğümünün Kauffman braket polinomu $F_L(t) = 1$ 'dir.

Örnek 6. Şekil 8'de verilen yönlü sol trefoil düğümünün Kauffman braket polinomunu hesaplayalım. Verilen sol trefoil düğüm diyagramının Kauffman braketi Örnek 4'te $\langle D \rangle = -t^{-5} - t^3 + t^7$ olarak hesaplandı. Sol trefoil düğüm diyagramının pozitif çaprazlama sayısı $p = 0$ ve negatif çaprazlama sayısı $n = 3$ 'tür ve Kauffman Braket polinomu $F_L(t) = (-t)^{-3(p-n)} \langle D \rangle = (-t)^{-3(0-3)} (-t^{-5} - t^3 + t^7) = t^{12} + t^4 - t^{16}$ 'dir.

Ödev 2. Sağ trefoil düğümünün Kauffman braketi ve Kauffman braket polinomunu hesaplayınız. Sol trefoil düğümü ile aynı Kauffman braket polinomuna mı sahiptir?



Şekil 8: Sol trefoil düğümünün Kauffman braket polinomu $F_L(t) = t^{12} + t^4 - t^{16}$ 'dir.

Kaynaklar

- [1] A. Adams, **The knot book, an elementary introduction to the mathematical theory of knots**, American Mathematical Society.
- [2] Kauffman L. H. (1995). **Knots and Applications**, River Edge, NJ: World Scientific.
- [3] Murasugi K. (1996). **Knot theory and its applications**, Birkhauser Boston.