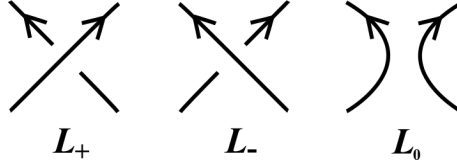


1 Dügüm Polinomları Jones polinomu

Yönlü bir düğüm ya da link diyagramı verilsin. Verilen düğümün ya da linkin bir çaprazlaması seçilir ve L_+ , L_- ve L_0 olacak şekilde Şekil 1'e göre çözümlenir:



Şekil 1: Bir düğümün seçilen bir çaprazlamaya göre çözümlenmesi.

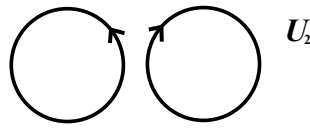
Bir L düğümünün ya da linkinin $V_L(t)$ ile gösterilen *Jones polinomu* aşağıdaki kurallara göre tanımlanır:

- (1) $V_U(t) = 1$, U çözükle düğüm,
- (2) $t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t)$.

Bir düğümün ya da linkin Jones polinomu katsayıları \mathbb{Z} 'de olan bir Laurent polinomudur ($\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$). Laurent polinomu katsayıları cisim \mathbb{F} 'de olan $\mathbb{F}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ değişkenin üssü pozitif ve negatif olabilen polinomlardır. Normal polinomdan bu nedenle farklıdır. Normal polinomlar negatif üs içermez.

(2) numaralı kural Reidemester hareketleri altında sabit kaldığı için Jones polinomu bir düğüm ya da link için değişmezdir.

Örnek 1. Şekil 2'de verilen iki bileşenli çözükle link U_2 'nin Jones polinomu hesaplayalım.

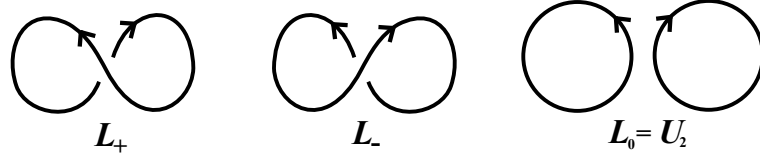


Şekil 2: Çözükle link U_2 .

Çözükle link U_2 için Şekil 3'te seçilen çözümlenmeye göre L_+ ve L_- çözükle düğüm olurken $L_0 = U_2$ olur.

Çözükle link U_2 'nin Jones polinomu:

$$\begin{aligned} t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t) \\ t^{-1}V_U(t) - tV_U(t) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{U_2}(t) \\ t^{-1} - t &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{U_2}(t) \end{aligned}$$



Şekil 3: Çözük link U_2 'nin L_+ , L_- ve L_0 'a göre çözülmesi.

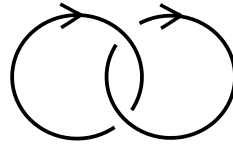
ve

$$V_{U_2}(t) = \frac{t^{-1} - t}{t^{1/2} - t^{-1/2}}$$

$$V_{U_2}(t) = -t^{-1/2} - t^{1/2}$$

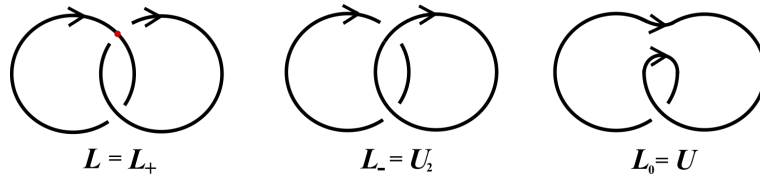
olarak hesaplanır.

Örnek 2. Şekil 4'te verilen pozitif Hopf link'in Jones polinomu hesaplayalım.



Şekil 4: Pozitif Hopf link L .

Pozitif Hopf link için Şekil 5'te işaretlenen çaprazlamaya göre yapılan çözülmesi sonucunda $L_+ = L$ ve $L_- = U_2$ olurken $L_0 = U$ çözük düğüm olur.



Şekil 5: Pozitif Hopf link L 'nin işaretli çaprazlamaya göre çözülmesi.

Yukarıdaki Örnek 1'de hesaplanan $V_{U_2}(t) = -t^{-1/2} - t^{1/2}$ kullanılarak pozitif Hopf link'in Jones polinomu $V_L(t) = -t^{5/2} - t^{1/2}$ olarak hesaplanır:

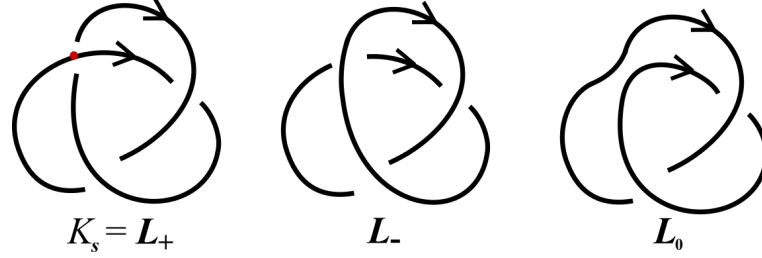
$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t)$$

$$t^{-1}V_L(t) - tV_{U_2}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_U(t)$$

$$t^{-1}V_L(t) - t(-t^{-1/2} - t^{1/2}) = (t^{1/2} - t^{-1/2})1$$

$$V_L(t) = t(-t^{-1/2} - t^{3/2}).$$

Örnek 3. Şekil 6'da verilen sağ trefoil K_s düğümünün Jones polinomunu hesaplayalım.



Şekil 6: Sağ trefoil K_s 'in işaretli çaprazlamaya göre çözülmesi.

Sağ trefoil için Şekil 6'da işaretlenen çaprazlamaya göre yapılan çözümlemesi sonucunda $L_+ = K_s$ sağ trefoil, $L_- = U$ çözümlenmiş sağ trefoil ve L_0 ise pozitif Hopf link olur. $V_{L_-}(t) = V_U(t) = 1$ 'dir. Örnek 2'de hesaplanan pozitif Hopf linkin Jones polinomu $V_L(t) = -t^{5/2} - t^{1/2}$ 'dir. Bu durumda, sağ trefoil düğümünün Jones polinomu $V_{K_s}(t) = -t^4 + t^3 + t$ olarak hesaplanır:

$$\begin{aligned} t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t) \\ t^{-1}V_{K_s}(t) - tV_U(t) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{U_2}(t) \\ t^{-1}V_{K_s}(t) - t1 &= (t^{1/2} - t^{-1/2})(-t^{5/2} - t^{1/2}) \\ V_{K_s}(t) &= -t^4 + t^3 + t. \end{aligned}$$

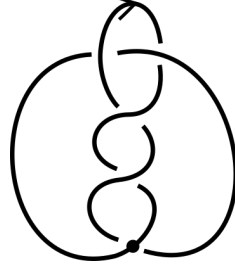
Verilen bir K düğümünün aynadaki görüntüsü K^* düğümü olsun. Bu durumda Jones polinomları $V_{K^*}(t) = V_K(t^{-1})$ eşitliği ile ilişkilidir. K düğümü sağ trefoil olduğu durumda aynadaki görüntüsü K^* sol trefoil düğümüdür. Bu durumda sol trefoil düğümünün Jones polinomu $V_{K^*} = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$ olur.

Jones polinomu ile Kauffman braket polinomu $F_K(t^{-1/4}) = V_K(t)$ eşitliği ile ilişkilidir.

1.1 Alıştırmalar

1. 7_2 düğümünün Alexander-Conway polinomunu hesaplayınız.
2. Kauffman braket polinomu sağ trefoil düğümü ve sol trefoil düğümünü birbirinden ayırır mı?

3. Şekil 7'de verilen 5_2 düğümünün işaretlenmiş çaprazlamasını kullanarak çözümlemesini yapınız ve Alexander-Conway polinomunu hesaplayınız.



Şekil 7: 5_2 düğümü.

4. Sekiz düğümünün Kauffman braketini ve Kauffman braket polinomunu hesaplayınız.
5. 4_1 düğümünün Jones polinomunu hesaplayınız.
6. Sekiz düğümünün Jones polinomunu hesaplayınız.

Kaynaklar

- [1] Jones, V.F.R. (1985). **A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras**, Bull. Amer. Math. Soc., 12, 103–111.
- [2] Murasugi K. (1996). **Knot theory and its applications**, Birkhauser Boston.