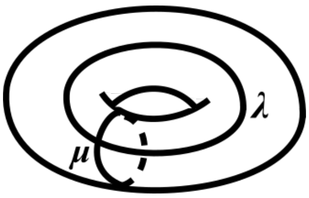
1 Düğüm Tipleri

Torus düğümleri, uydu düğümleri ve hiperbolik düğümler olmak üzere üç tip düğüm tipi vardır. Her düğüm bu üç kategoriden birisine düşer.

1.1 Torus düğümleri

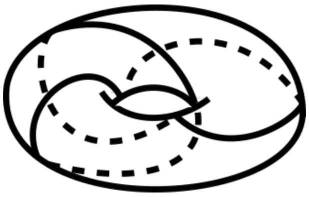
Tanım 1. Kendisini kesmeyecek şekilde torus üzerine çizilebilen düğümlere *torus düğümleri* denir.

En basit torus düğümü örneği çözük düğümdür. Torus üzerinde Şekil 4'te çizilen μ çözük düğümü torusun meridyeni ve λ çözük düğümü de torusun boylamı olarak adlandırılır.



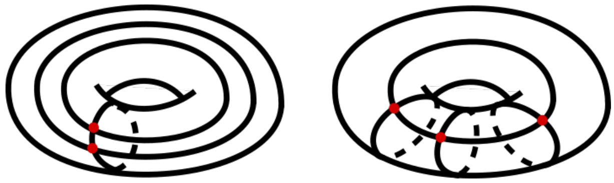
Şekil 1: Meridyen μ ve boylam λ.

Genel olarak p ve q aralarında asal olmak şartıyla p kere meridyen ve q kere boylam etrafında dolanan düğüme (p, q)-torus düğümü denir. Örneğin; sol trefoil düğümü bir torus düğümüdür. Trefoil düğümü 3 kere meridyen etrafında, 2 kere de boylam etrafında dolandığından $(3, 2)$-torus düğümü olarak adlandırılır. Trefoilin $(3, 2)$-torus düğümü olduğu nasıl anlaşılır?



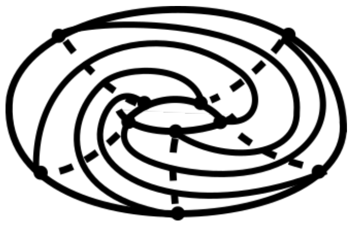
Şekil 2: $(3, 2)$-torus düğümü.

Eğer bir düğüm meridyen etrafında 3 kere dolanıyorsa boylamı 3 kere keser. Boylam etrafında 2 kere dolanıyorsa meridyeni 2 kere keser. Örneğin, $(5, 3)$-torus düğümünü torus üzerine çizelim, 5 kere meridyen etrafında dolandığından boylamı 5 kere keser. 3 kere boylam etrafında dolandığından meridyeni 3 kere keser. $(5, 3)$-torus düğümünü çizmek için 5 nokta torusun içine, 5 nokta da torusun dışına yerleştirilir. İç ve dış noktaları ilk önce arka-



Şekil 3: Meridyeni 2 kere ve boylamı 3 kere keser.

dan birleştirilir. Daha sonra iç ve dış noktalar saat yönünün tersine 3 nokta atlayarak birbiri ile birleştirilerek $(5,3)$-torus düğümü elde edilir.



Şekil 4: $(5,3)$-torus düğümü.

Aralarında asal olmayan p ve q sayıları için sonuç ne olur? Örneğin $(2,2)$-torus düğümü aslında düğüm değil, link olur.

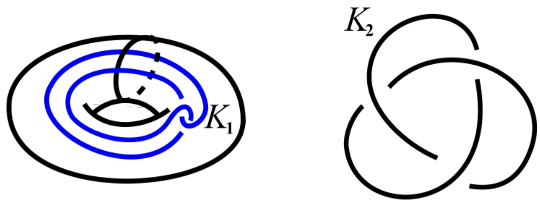
Ödev 1. Torus üzerinde $(2,2)$-torus düğümünü çiziniz ve link olduğunu gösteriniz.

1.2 Uydu düğümleri

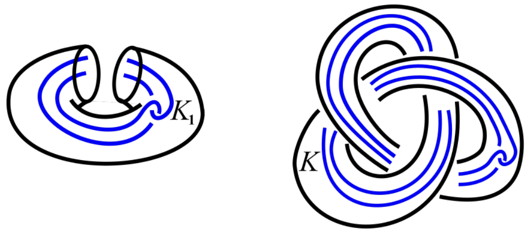
K_1 düğümü, katı torus içinde bir düğüm ve K_2 düğümü çözük düğümden farklı herhangi bir düğüm olsun. Katı torusu bir meridyeninden kesip K_2 şeklini vererek tekrar yapıştırma ile elde edilen yeni düğüme uydu düğümü denir. Bileşke düğümleri genelde bu kategoriye girer. Bir uydunun her zaman uydusu olduğu gezegenin yörüngesinde kalması gibi elde edilen yeni düğüm her zaman K_2 şeklindeki katı torus içinde kaldığı için elde edilen yeni düğüme uydu düğümü denilmiştir.

Örnek 1. Şekil 5'te katı torus içerisinde verilen K_1 düğümü ve K_2 sol trefoil düğümü kullanılarak Şekil 6'da K uydu düğümü elde edilmiştir.

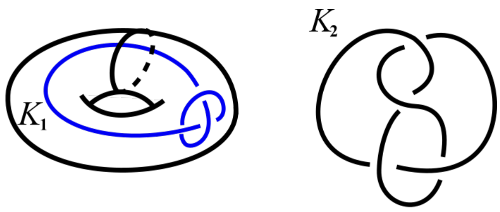
Ödev 2. Şekil 7'de katı torus içerisinde verilen K_1 düğümü ve Sekiz düğümü K_2'yi kullanarak K uydu düğümünü çiziniz ve elde ettiğiniz düğümün trefoil ve Sekiz düğümlerinin bileşkesi olduğunu Reidemeister hareketlerini kullanarak gösteriniz.



Şekil 5: Katı torus içindeki K_1 düğümü ve K_2 düğümü.



Şekil 6: Meridyen μ'den kesip K_2 düğümünün şeklini verdikten sonra yapıştırılarak K uydu düğümü elde edilir.

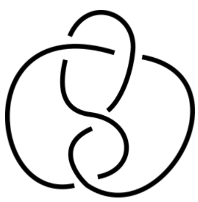


Şekil 7: Katı torus içindeki K_1 düğümü ve K_2 Sekiz düğümü.

1.3 Hiperbolik düğümler

$K \subseteq \mathbb{R}^3$ bir düğüm olsun. Eğer $\mathbb{R}^3 \setminus K$ bir hiperbolik manifold ise, K düğümüne hiperbolik düğüm denir. *Hiperbolik manifold* üzerinde hiperbolik metrik (eğriliği -1, negatif olan metrik) olan manifoldtur.

Örneğin, Şekil 8'de verilen Sekiz düğümü hiperbolik bir düğümdür. Fakat bunu göstermek kolay değildir.



Şekil 8: Sekiz düğümü bir hiperbolik düğümdür.

Kaynaklar

[1] A. Adams, **The knot book, an elementary introduction to the mathematical theory of knots**, American Mathematical Society.