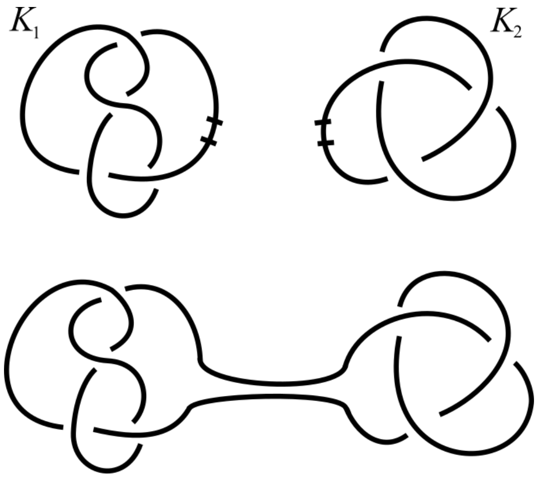
1 Düğüm bileşimleri, Reidemeister hareketleri, düğüm tablosu

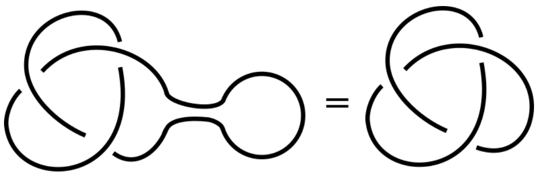
1.1 Düğüm bileşimleri

K_1 ve K_2 olmak üzere iki düğüm diyagramı verilsin. İki düğümden de çaprazlamalarından uzakta küçük bir yay seçilerek çıkarılsın ve aşağıda Şekil 1'deki gibi birleştirilsin. Bu şekilde elde edilen yeni düğüme iki *düğümün bileşimi* denir ve $K_1 \# K_2$ ile gösterilir.



Şekil 1: $K_1 \# K_2$.

Örnek 1. Herhangi bir düğüm ile çözük düğümün bileşimi sonucunda yine düğümün kendisi elde edilir. Yani, $K\#$ çözük düğüm $= K$'dır. Bu durum Şekil 2'de verilmiştir.



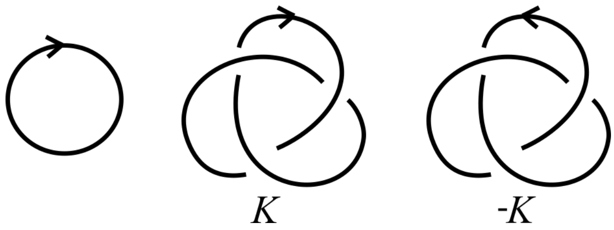
Şekil 2: $K\#$ çözük düğüm $= K$.

Eğer bir düğüm çözük düğüm dışında iki düğümün bileşimi olacak şeklinde yazılamıyorsa bu düğüme *asal düğüm* denir. Açıkça görülemese de trefoil ve Sekiz düğümleri asal düğümlerdir. Örneğin, 1 sayısını 1'den büyük iki sayının çarpımı olarak yazamayız. Çözük düğüm de bir bileşik düğüm değildir. Tam sayılar asal çarpanlarına tek bir şekilde ayrılır. Benzer şekilde bir bileşik düğüm de tek bir şekilde asal düğümlerin bileşimi olacak şekilde ayrılır.

1.2 Yönlü düğüm/ link

Bir düğüm diyagramı üzerinde belli bir nokta belirleyip, o noktadan başlayarak saat yönünde ya da saat yönünün tersine gidebiliriz. Diyagramı üzerinde gidilecek yönün seçilerek belirtildiği düğüme/ linke *yönlü* düğüm/ link denir. Yönlü verilen bir K düğümü için $-K$ düğümü ters yönlü K düğümünü gösterir.

Örnek 2. Yönlü düğüm örnekleri Şekil 3'te verilmiştir.



Şekil 3: Yönlü düğümler.

1.3 Alıştırmalar

1. Yönlü iki düğümün bileşimi nasıl alınır? Yönlü düğümlerin bileşimi alınırken nelere dikkat edilir?

2. Sağ trefoil düğümü ve sol trefoil düğümünün bileşiminden elde edilen düğümü çiziniz.

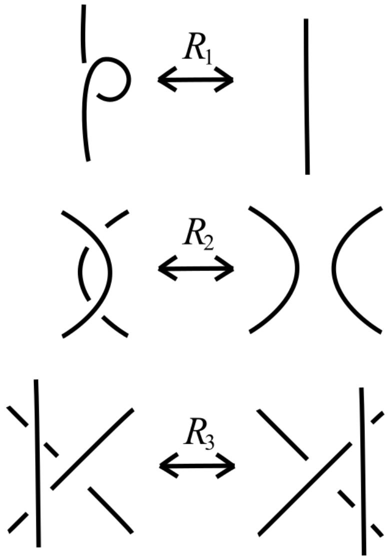
1.4 Reidemeister hareketleri

Bir düğüm diyagramına yapılabilecek R_1, R_2, R_3 olmak üzere üç tip Reidemeister hareketi vardır ve bu hareketler Şekil 4'te verilmiştir.

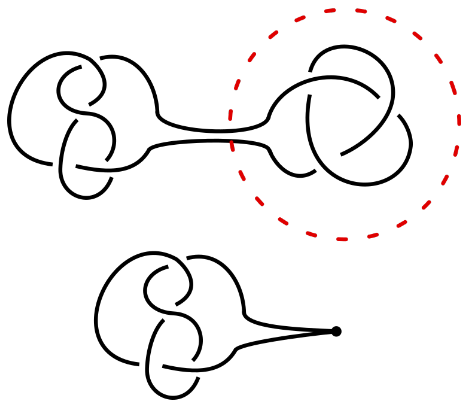
Teorem 1.1. *(Reidemeister, Markov) Verilen iki düğüm/ link diyagramının aynı düğümü/ linki temsil etmesi için gerek ve yeter şart iki düğüm/ link diyagramının sonlu sayıda R_1, R_2, R_3 Reidemeister hareketleri, bu hareketlerin tersleri R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1} ve düzlem izotopileri ile ilişkili olmasıdır.*

Burada, izotopi düğüm yayının deformasyonu demektir. Düzlem izotopisi ise düğüm yayının içinde bulunduğu 3-boyutlu uzayda kendisini kesmeyecek şekilde yaptığı hareketlerdir. Örneğin, Şekil 5'te verilen düğümün bir kısmı büzüldüğü için ve Şekil 6'da verilen düğümün içinden geçildiği için iki örnek de düzlem izotopisine örnek değildir.

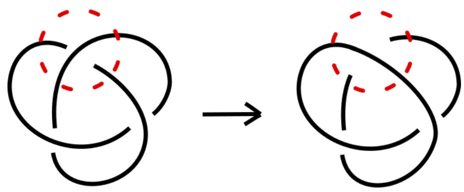
Düzlem izotopisine örnek olarak Şekil 7 verilmiştir.



Şekil 4: Reidemeister hareketleri.

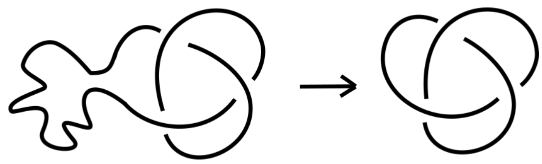


Şekil 5: Düğüm yayının bir kısmını büzemeyiz. Düzlem izotopisi değildir.



Şekil 6: Düğüm yayı içinden geçilerek kendisini kesecek şekilde deformasyon yapılmıştır. Düzlem izotopisi değildir.

Bir düğümün aynadaki görüntüsü düğümün tüm çaprazlamalarının karşıt çaprazlamayla değiştirilmesi ile elde edilir. Aynadaki görüntüsüne eşit olan düğüme *amfikiral düğüm* denir. Amfikiral kelimesi, kimyacıların kullandığı kiral kelimesinin matematikçiler tarafından kullanılan karşılığıdır. Sağ trefoil düğümünün aynadaki görüntüsü sol trefoil düğümüdür ve trefoil

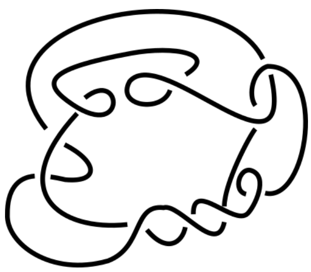


Şekil 7: Düzlem izotopisi örneğidir.

düğümü aynadaki görüntüsüne eşit değildir. Sağ trefoil ve sol trefoil düğümlerinin birbirinden farklı olduğunu gösterme tekniklerini bu dersin sonunda öğrenmiş olacağız.

1.5 Alıştırmalar

1. Reidemeister hareketlerini kullanarak Şekil 8'de verilen düğümün çözük düğüm olduğunu gösteriniz.

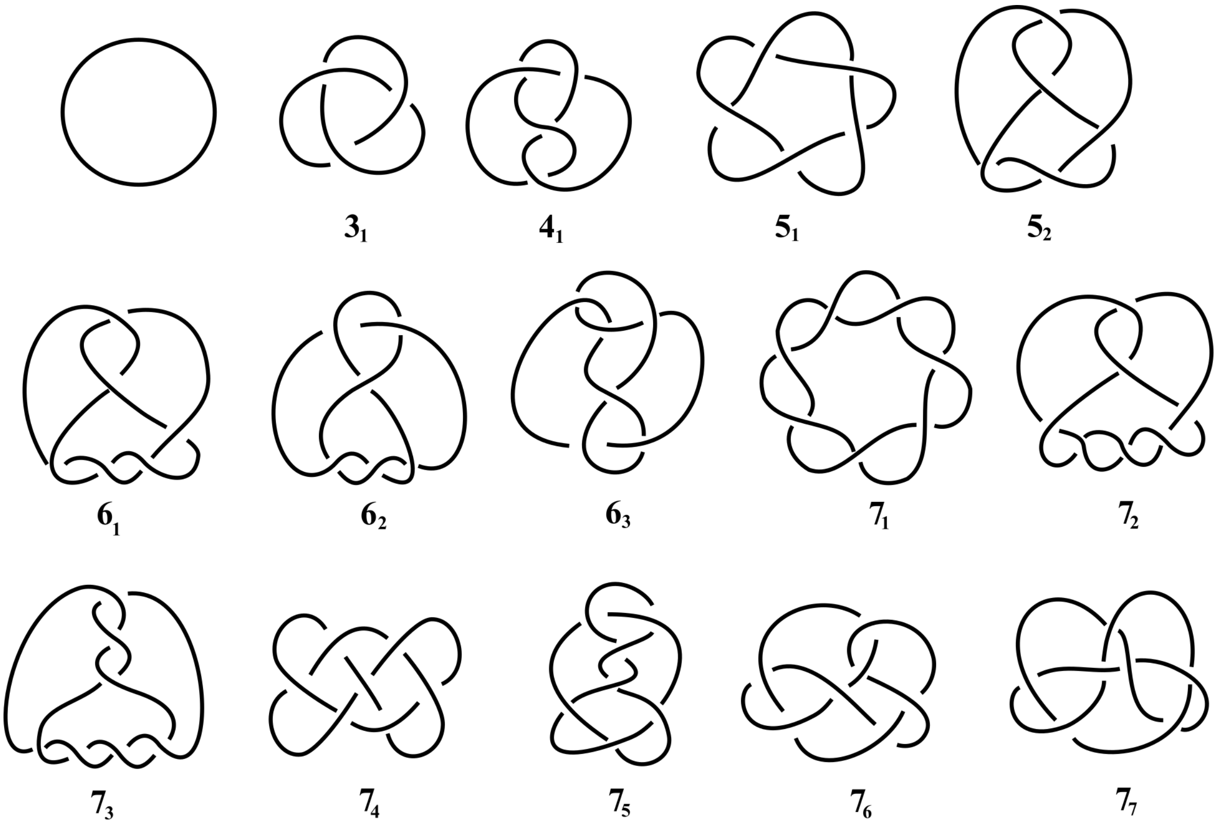


Şekil 8: Çözük düğüm.

2. Reidemeister hareketlerini kullanarak Sekiz düğümünün aynadaki görüntüsüne eşit olduğunu gösteriniz, hangi Reidemeister hareketlerini kullandığınızı belirtiniz.

2 Düğüm Tablosu

Aşağıda Şekil 9'da verilen düğüm tablosunda yedi ve yediden daha az çaprazlamaya sahip düğüm diyagramları listelenmiştir. Tablodaki düğümler için Alexander ve Briggs'in 1926 yılında kullandıkları notasyon ve sıralama kullanılmıştır.



Şekil 9: Düğüm Tablosu.

Kaynaklar

[1] A. Adams, **The knot book, an elementary introduction to the mathematical theory of knots**, American Mathematical Society.

[2] Murasugi K. (1996). **Knot theory and its applications**, Birkhauser Boston.

[3] Reidemeister K. (1932). **Knotentheorie**, Berlin: Springer-Verlag.

[4] Rolfsen, D. (1976). **Knots and links**, Berkeley, California: Publish or Perish Press.