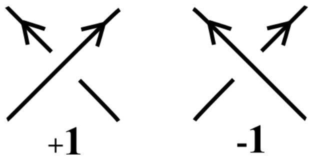
1 Düğüm değişmezleri, Bağlanma Sayısı

1.1 Bağlanma sayısı

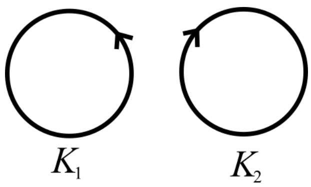
Verilen yönlü düğüm ya da yönlü link diyagramının her bir çaprazlaması için Şekil 1'e göre bir sayı verebiliriz. **+1**-sayısı verdiğimiz çaprazlamaya *pozitif çaprazlama*, **-1**-sayısı verdiğimiz çaprazlamaya ise *negatif çaprazlama* denir.



Şekil 1: Pozitif ve negatif çaprazlama.

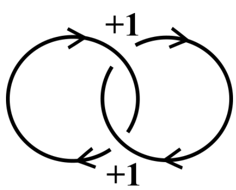
Tanım 1. K_1 ve K_2 olmak üzere iki yönlü düğüm verilsin. K_1 ve K_2 arasındaki çaprazlamalardan gelen $+1$ ve -1 sayılarının toplamının yarısına K_1 ve K_2'nin *bağlanma sayısı* denir ve $bs(K_1, K_2)$ ile gösterilir.

Örnek 1. Aralarında hiç çaprazlama olmadığı için Şekil 2'de verilen çözük linkin bileşenleri için bağlanma sayısı $bs(K_1, K_2) = 0$'dır.



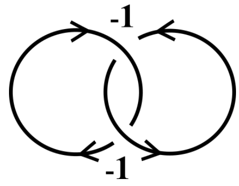
Şekil 2: Bağlanma sayısı $bs(K_1, K_2) = 0$.

Örnek 2. Şekil 3'te verilen Hopf linkin bileşenleri arasındaki bağlanma sayısı $bs(K_1, K_2) = \frac{1}{2}(+1+1) = +1$'dir. Bileşenlerinin bağlanma sayısı $+1$ olan Hopf linke *pozitif Hopf link* denir.



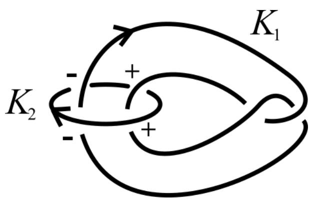
Şekil 3: Pozitif Hopf link, bağlanma sayısı $bs(K_1, K_2) = +1$.

Örnek 3. Şekil 4'te verilen Hopf linkin bileşenleri arasındaki bağlanma sayısı $bs(K_1, K_2) = \frac{1}{2}(-1-1) = -1$'dir. Bileşenlerinin bağlanma sayısı -1 olan Hopf linke *negatif Hopf link* denir.



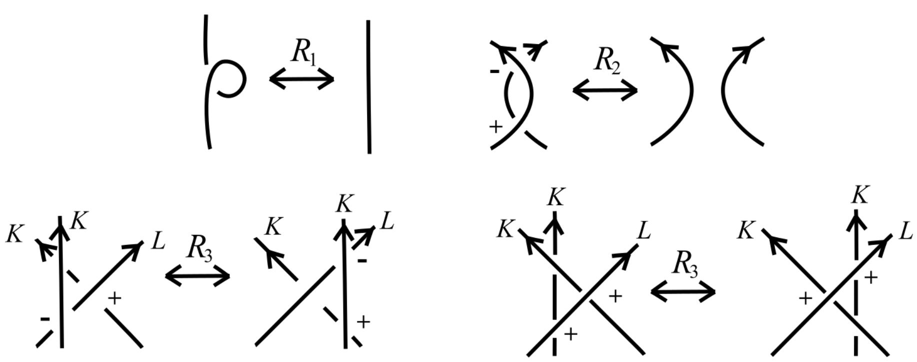
Şekil 4: Negatif Hopf link, bağlanma sayısı $bs(K_1, K_2) = -1$.

Örnek 4. Şekil 5'te verilen linkin bileşenleri arasındaki bağlanma sayısını hesaplarken sadece aralarındaki çaprazlamalardan gelen $+1$ ve -1 sayıları hesaba katılır ve $bs(K_1, K_2) = \frac{1}{2}(-2+2) = 0$'dır.



Şekil 5: Bağlanma sayısı $bs(K_1, K_2) = 0$.

Örnek 5. Aşağıdaki Şekil 6'da çaprazlamalara verilen $+$ ve $-$'lerin Reidemeister hareketleri altında değişimlerine örnekler verilmiştir. Şekil 6'da verilen durumlarda görüldüğü üzere toplam $+$ ve $-$'lerin sayısı Reidemeister hareketleri sonrasında sabit kalmıştır.

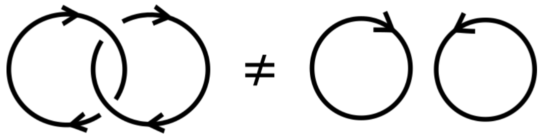


Şekil 6: Reidemeister hareketleri ve bağlanma sayısı.

Ödev 1. Olabilecek tüm durumlar için çaprazlamalardan gelen toplam $+$ ve $-$'lerin sayısının Reidemeister hareketleri sonrasında sabit kaldığını gösteriniz.

Bağlanma sayısı Reidemeister hareketleri sonrasında sabit kaldığı için düğüm ya da link diyagramından bağımsızdır. Bu nedenle yönlü linkler için bir değişmezdir.

Örnek 6. Şekil 7'de verilen ve bağlanma sayıları Örnek 1'de ve Örnek 2'de hesaplanan iki linkin bileşenleri arasındaki bağlanma sayıları birbirinden farklı olduğu için iki link birbirinden farklıdır.



Şekil 7: İki farklı link.

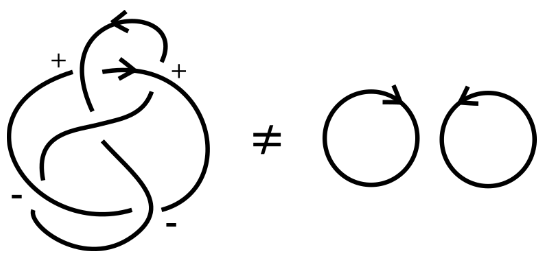
Yönsüz linkler için bağlanma sayısının mutlak değeri değişmez olur.

$$|bs(-K_1, K_2)| = |bs(K_1, K_2)|.$$

Sonuç 1.1. *Bileşenleri K_1 ve K_2 olmak üzere iki bileşenli olarak verilen bir L linki için $|bs(K_1, K_2)| \neq 0$ ise L linki çözük link değildir.*

Diğer taraftan $bs(K_1, K_2) = 0$ olan bir link çözük link olmak zorunda değildir.

Örnek 7. Aşağıdaki Şekil 8'de verilen iki linkin bağlanma sayısı 0 olmasına rağmen iki link birbirinden farklıdır. Bağlanma sayısı bu linkleri ayırmak için yeterli değildir, farklı olduklarını söylemek için yeni değişmezler tanımlayacağız.



Şekil 8: Bağlanma sayıları aynı olan iki farklı link.

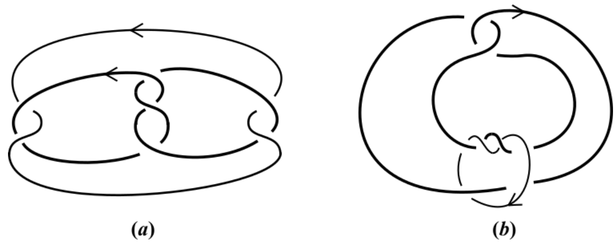
1.2 Bir düğümün öz bağlanma sayısı

Verilen herhangi bir yönlü düğümün *öz bağlanma sayısı* düğümün aynı yönlü paralel kopyası ile arasındaki bağlanma sayısı olarak tanımlanır. Yani, K düğümü yönlü bir düğüm, K' ise

K düğümü ile aynı yönde olan paralel kopyası olsun. K düğümünün öz bağlanma sayısı $bs(K) = bs(K, K')$ dır.

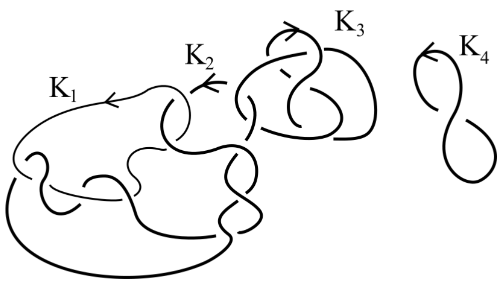
1.3 Alıştırmalar

1. Verilen bir düğümün yönü değiştirildiğinde çaprazlamaları için elde edilen sayı nasıl değişir?
2. Bir sağ trefoil düğümü alınız ve istediğiniz yönü vererek öz bağlanma sayısını hesaplayınız. Seçtiğiniz yönün tersine yön verdiğinizde düğümün öz bağlanma sayısı değişti mi? Öz bağlanma sayısı ve düğüme verilen yön nasıl ilişkilidir?
3. K ve L yönlü iki düğüm, $-K$ ise K'nın ters yönlü hali olsun. K ve L'nin bağlanma sayısı $bs(K, L)$ ile gösterilsin. $bs(-K, L) = -bs(K, L)$ olduğunu gösteriniz.
4. Şekil 9'da verilen düğümlere göre iki düğüm arasındaki bağlanma sayısını hesaplayınız.



Şekil 9: Bağlanma sayısı.

5. Şekil 10'da verilen düğümlere göre $bs(K_1, K_2)$, $bs(K_1, K_3)$, $bs(K_1, K_4)$, $bs(K_2, K_3)$, $bs(K_2, K_4)$ ve $bs(K_3, K_4)$ bağlanma sayılarını hesaplayınız.



Şekil 10: Bağlanma sayısı.

6. Bağlanma sayısı neden tam sayıdır?

Kaynaklar

[1] A. Adams, **The knot book, an elementary introduction to the mathematical theory of knots**, American Mathematical Society.

[2] Murasugi K. (1996). **Knot theory and its applications**, Birkhauser Boston.