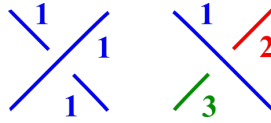


1 Dügüm Değişmezleri

1.1 Üçlü renklendirme

Tanım 1. Verilen bir düğüm ya da link eğer aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde renklendirilebiliyorsa *üçlü renklendirilebilir* denir. Düğüm ya da linki renklendirmek için:

- (1) en az iki renk kullanılmalı,
- (2) her çaprazlamasında ya üç yay aynı renk olmalı ya da üçü de farklı renk olmalıdır.

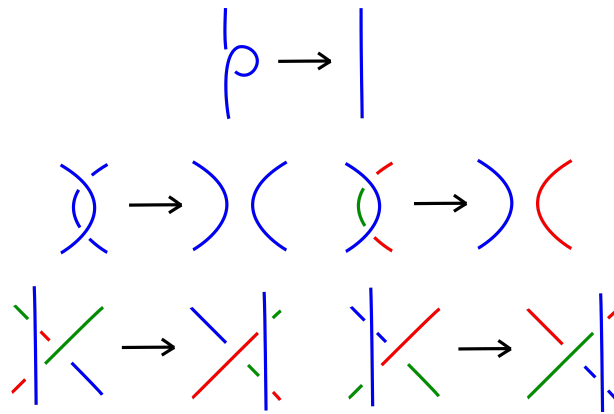


Şekil 1: Üçlü renklendirme kuralı.

Not: Üçlü renklendirme için yönün önemi yoktur.

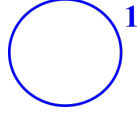
Teorem 1.1. *Üçlü renklendirme özelliği Reidemeister hareketleri sonrasında değişmez; bu nedenle düğüm ya da link diyagramı için değişmezdir.*

İspat 1. Şekil 2'de R_1 ve R_2 Reidemeister hareketleri altında üçlü renklendirme özelliğinin korunduğunu ve R_3 Reidemeister hareketi altında üçlü renklendirme özelliğinin korunduğu bazı durumlar verilmiştir. Diğer kalan durumlarda üçlü renklendirme özelliğinin R_3 Reidemeister hareketi altında korunduğu benzer şekilde gösterilir.

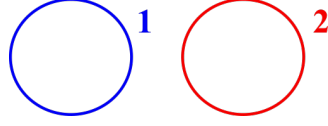


Şekil 2: Üçlü renklendirme kuralı.

Örnek 1. Şekil 3'te verilen çözükle düğüm en az iki renk kullanılmalı kuralını sağlamadığı için üçlü renklendirilemez.



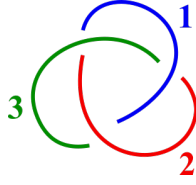
Şekil 3: Çözük düğüm üçlü renklendirilemez.



Şekil 4: İki bileşenli çözük link U_2 , üçlü renklendirilir.

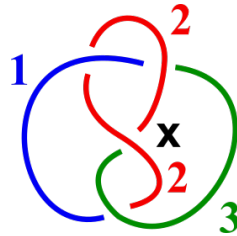
Örnek 2. Şekil 4'te verilen iki bileşenli çözük link U_2 üçlü renklendirilir.

Örnek 3. Şekil 5'te verilen trefoil düğümü üçlü renklendirilebilir. Bu durumda, trefoil düğümü çözük düğümden farklıdır sonucu elde edilir.



Şekil 5: Trefoil düğümü üçlü renklendirilir.

Örnek 4. Şekil 6'da verilen Sekiz düğümü üçlü renklendirilemez. Bu durumda, Şekil 5'te verilen trefoil düğümü üçlü renklendirilebildiği için Sekiz düğümü, trefoil düğümünden farklıdır. Aynı şekilde, Şekil 4'te verilen iki bileşenli çözük link U_2 ve Sekiz düğümü birbirinden farklıdır. Diğer taraftan, çözük düğüm de üçlü renklendirilemediği için Sekiz düğümünün ve çözük düğümün birbirinden farklı olduğunu üçlü renklendirmeyi kullanarak söyleyemeyiz.



Şekil 6: Sekiz düğümü üçlü renklendirilemez.

1.2 Alıştırmalar

1. 5 Çaprazlamaya sahip 5_1 ve 5_2 düğümlerinden hangilerinin l renklendirilebildiđini belirleyiniz ve renklendirilebilenleri renklendiriniz.
2. l renklendirilme kullanılarak trefoil ve Sekiz düğümlerinin birbirinden farklı olduğu söylenebilir mi?
3. 6 Çaprazlamaya sahip 6_1 , 6_2 ve 6_3 düğümlerinden hangilerinin l renklendirilebildiđini belirleyiniz ve renklendirilebilenleri renklendiriniz.

Kaynaklar

- [1] A. Adams, **The knot book, an elementary introduction to the mathematical theory of knots**, American Mathematical Society.