1 Düğüm Değişmezleri

1.1 Çaprazlama sayısı

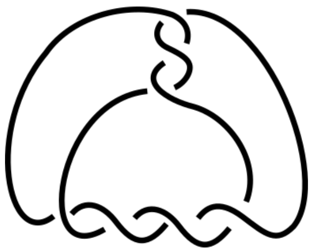
Tanım 1. Bir K düğümünün *çaprazlama sayısı*, düğüm için verilen tüm diyagramlarının çaprazlama sayılarının en küçüğü olarak tanımlanır ve $c(K)$ ile gösterilir.

Verilen bir Kdüğümü için n çaprazlamaya sahip bir diyagram çizilebiliyorsa $c(K) \leq n$'dir. Genelde çaprazlama sayısını hesaplamak çok zordur.

Örnek 1. Çözük düğümün çaprazlama sayısı $c(U) = 0$'dır.

Örnek 2. 1 ve 2 çaprazlama sayısına sahip düğümlerin çözük düğüm olduğunu bildiğimiz için trefoil düğümünün çaprazlama sayısı 3'tür.

Örnek 3. Aşağıda Şekil 1'de verilen 7_3 düğümünün çaprazlama sayısı $c(K) = 7$'dir. Düğüm tablosunda kendisinden önce gelen $3_1, 4_1, 5_1, 5_2, 6_1, 6_2, 6_3$ düğümlerinden birine eşit olmadığını nasıl söyleyeceğiz? Düğüm polinomları gibi çeşitli değişmezler kullanarak söyleyeceğiz.



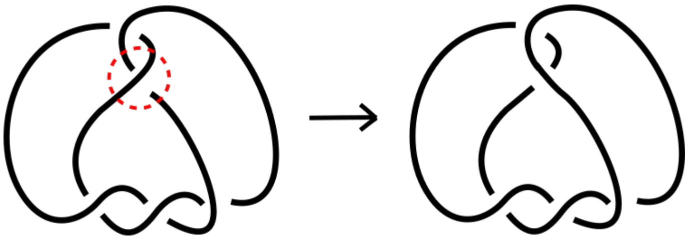
Şekil 1: 7_3 düğümü.

1.2 Çözümleme sayısı

Tanım 2. Bir K düğümünün *çözümleme sayısı*, düğüm için verilen tüm diyagramları içinde çözük düğüm yapmak için gereken çaprazlama değiştirme sayısının en küçüğü olarak tanımlanır ve $u(K)$ ile gösterilir.

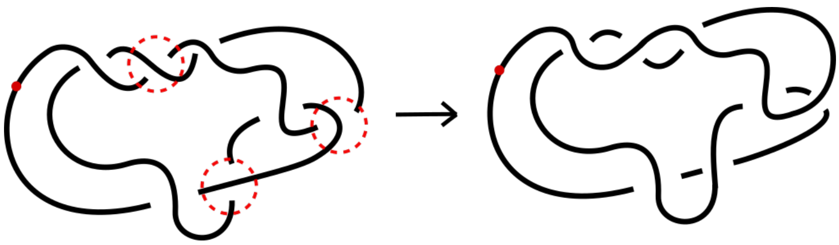
Örnek 4. Aşağıda Şekil 2'de verilen düğümün bir çaprazlamasını değiştirince çözük düğüm elde etmemiz nedeni ile düğümün çözümleme sayısı $u(K) = 1$'dir.

Teorem 1.1. *Sonlu sayıda çaprazlama değiştirme ile her düğüm çözük düğüme dönüşebilir.*



Şekil 2: Bir çaprazlamayı değiştirince çözük düğüm olur, $u(K) = 1$.

İspat 1. Bir düğüm diyagramı verilsin. Düğümün bir noktasından başlayıp seçtiğimiz bir yönde çaprazlama görene kadar devam edilerek, tüm çaprazlamalardaki yaylar yukarıda olacak şekilde çaprazlamalar değiştirilir. Eğer geçtiğimiz çaprazlamada yay zaten yukarıdan geçiyorsa çaprazlamada değişiklik yapılmaz. Bu şekilde sonlu sayıda çaprazlamalarda değişiklik yapılarak bir düğüm, çözük düğüm yapılabilir ve bir düğümün çözümleme sayısına üst sınır bulunur. Şekil 3'te bu durum bir örnek ile açıklanmıştır.



Şekil 3: Çaprazmaların hepsi yukarıda olacak şekilde ayarlanır.

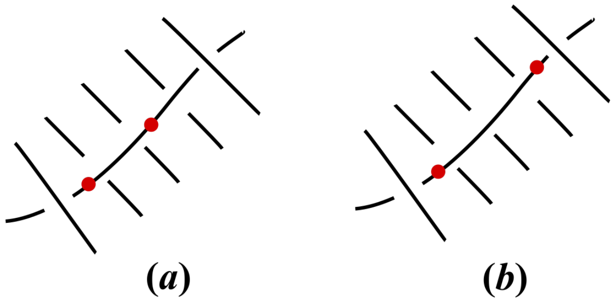
Verilen bir düğüm için çözümleme sayısını hesaplamak çok zordur. Çözümleme sayısı, $u(K) = 1$ olan örnekler bulmak kolaydır. Örneğin, 8_3 düğümünün çözümleme sayısı 2'dir. 8_3 düğümünün tüm diyagramları içinde çözümleme sayısı 1 olan diyagramı olmadığını nasıl söyleyeceğiz? Kanenobu ve Murakami bunu ameliyat teknikleri kullanarak ispatlamıştır, [2].

Açık Soru: Bileşik düğümlerin çözümleme sayısı için $u(K_1 \# K_2) = u(K_1) + u(K_2)$ eşitliği doğru mudur? Sharlemann $u(K_1 \# K_2) = 1$ olduğunda bu durumun doğru olduğunu göstermiştir, [4].

1.3 Köprü sayısı

Verilen bir düğüm diyagramının çaprazlamalarında hep üstten geçen yayları düşünüyoruz.

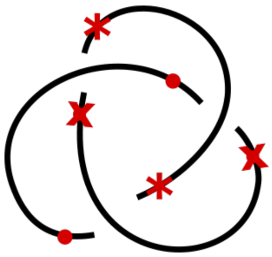
Örnek 5. Şekil 4(a)'daki işaretli yay üstten geçiyor. Şekil 4(b)'deki yay ise çaprazlamalarda üstten geçen maksimal yaydır. Maksimal yay düğüm diyagramında sanki düğüm için bir köprü oluşturuyor gibi gözükmektedir.



Şekil 4: (a) İşaretli yay üstten geçiyor, (b) Üstten geçen maksimal yay.

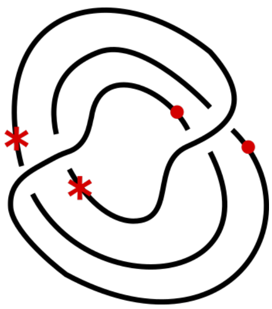
Tanım 3. Bir düğüm diyagramının *köprü sayısı*, üstten geçen maksimal yayların toplam sayısı olarak tanımlanır.

Örnek 6. Şekil 5'te verilen sağ trefoil düğüm diyagramının köprü sayısı 3'tür.



Şekil 5: Sağ trefoil diyagramı.

Örnek 7. Şekil 6'da verilen diğer bir sağ trefoil düğüm diyagramının köprü sayısı ise 2'dir.



Şekil 6: Başka bir sağ trefoil diyagramı.

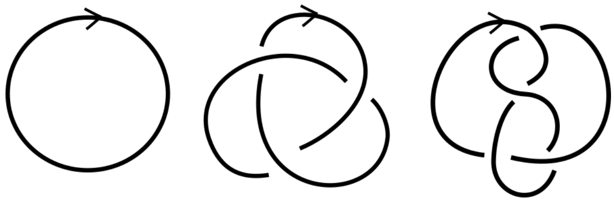
Tanım 4. Bir K düğümünün *köprü sayısı*, düğümün tüm diyagramlarının köprü sayılarının en küçüğü olarak tanımlanır ve $kp(K)$ ile gösterilir.

Ödev 1. Bir Kdüğümünün köprü sayısının $kp(K) = 1$ olması için gerek ve yeterli koşul K düğümünün çözük düğüm olmasıdır.

Sonuç 1.2. *Sağ trefoil düğümünün köprü sayısı, $kp(K) = 2$'dir.*

1.4 Alıştırmalar

1. Şekil 7'de verilen çözük düğüm, sağ trefoil düğümü ve Sekiz düğümünün birbirinden farklı düğümler olduğunu; yani izotopik olmadıklarını istediğiniz düğüm değişmezlerini kullanarak gösteriniz.



Şekil 7: Çözük düğüm, sağ trefoil düğümü, Sekiz düğümü.

2. Trefoil düğümünün çaprazlama sayısının $c(K) = 3$ olduğunu ispatlayınız.

3. Trefoil düğümünün ve Sekiz düğümünün çözümleme sayısını hesaplayınız.

4. 7_2 düğümünün çözümleme sayısının $u(K) = 1$ olduğunu gösteriniz.

5. Çözümleme sayısının çaprazlama sayısından küçük eşit olduğunu gösteriniz.

Kaynaklar

[1] A. Adams, **The knot book, an elementary introduction to the mathematical theory of knots**, American Mathematical Society.

[2] Kanenobu T., Murakami H. (1986). **Two-bridge knots with unknotting number one**, Proc. Amer. Math. Soc., 98(3), 499–502.

[3] Murasugi K. (1996). Knot theory and its applications, Birkhauser Boston (Sayfa: 56-65)

[4] Scharlemann M. (1985). Unnoting number one knots are prime, Invent. Math., 82, 37–55.