1 Düğümler ve yüzeyler, Seifert yüzeyler, Euler karakteristiği

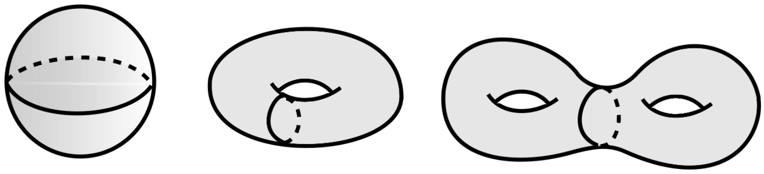
1.1 Düğümler ve Yüzeyler

Bağlantılı 2-manifoldlara yüzeyler denir. Yüzeyleri göstermek için genellikle Σ notasyonunu kullanacağız.

1.2 Kapalı yüzeyler

Verilen bir Σ yüzeyi eğer kompakt ve sınırı $\partial\Sigma = \emptyset$ ise Σ yüzeyine kapalı yüzey denir.

Örnek 1. Şekil 1'de verilen küre S^2, torus, cinsi 2 olan yüzey kapalı yüzeylere örnektir.

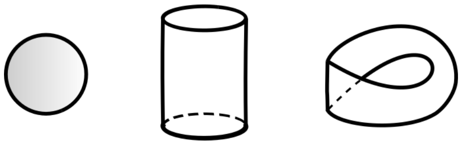


Şekil 1: Kapalı yüzeyler.

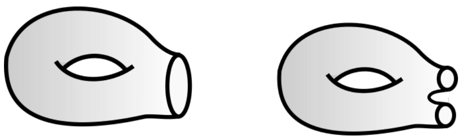
1.3 Sınırlı yüzeyler

Verilen bir Σ yüzeyi için $\partial\Sigma \neq \emptyset$ olabilir.

Örnek 2. Şekil 2'de 1-sınır bileşenine sahip disk, silindir ve Möbius band örnek olarak verilmiştir. Yüzeylerin birden fazla sınır bileşeni olabilir. Şekil 3'te ise 1-sınır bileşenli torus ve 2-sınır bileşenli torus örnek olarak verilmiştir.



Şekil 2: Disk, silindir ve Möbius band.



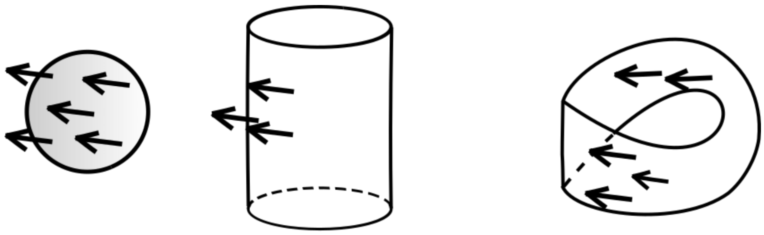
Şekil 3: 1-sınır bileşenli ve 2-sınır bileşenli torus T^2.

1.4 Yüzeyler için yön kavramı

Yüzeyin üzerindeki bir noktada normal vektörü yüzeyin ya içine doğru ya da yüzeyin dışına doğru işaret eder. Yüzeyin her noktasında her zaman içe doğru ya da her zaman dışa doğru işaret edecek şekilde normal vektörü seçebiliyorsak yüzeye yön vermiş oluruz. Yüzeyler için yön, her noktada tutarlı bir normal vektörü seçebilmektir.

Tanım 1. Her noktasında tutarlı bir normal vektörü seçebildiğimiz yüzeylere *yönlendirilebilen*, seçemediğimiz yüzeylere *yönlendirilemeyen* yüzey denir.

Örnek 3. Şekil 4(a)'da verilen disk ve silindir yüzeyleri yönlendirilebilen sınırlı yüzeylerdir. Şekil 4(b)'de verilen Möbius band ise üzerinde tutarlı bir seçim yapamadığımız için yönlendirilemeyen yüzeydir. Möbius band üzerinde bazı noktalarda normal vektörü içe bazı noktalarda dışa doğru olduğundan tutarlı değildir.



(*a*) **(*b*)**

Şekil 4: (a) Yönlendirilebilen disk ve silindir, (b) yönlendirilemeyen Möbius band.

Not: Eğer Möbius band bir yüzeyin alt uzayı ise o yüzey yönlendirilemeyen yüzeydir.

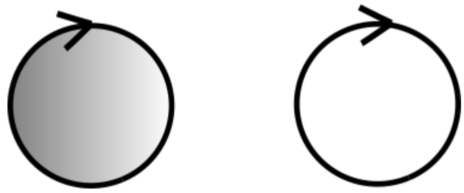
1.5 Seifert yüzeyler

Teorem 1.1. *$\mathbb{R}^3$ içerisinde verilen her yönlü düğüm, yönlendirilebilen bir yüzeyin sınır bileşenidir. Yani her $K \subseteq \mathbb{R}^3$ düğümü için, en az bir yönlendirilebilen Σ yüzeyi vardır ki $\partial\Sigma = K$'dır.*

Tanım 2. Yönlendirilebilen ve sınırı $\partial\Sigma = K$ olan Σ yüzeyine K düğümünün *Seifert yüzeyi* denir.

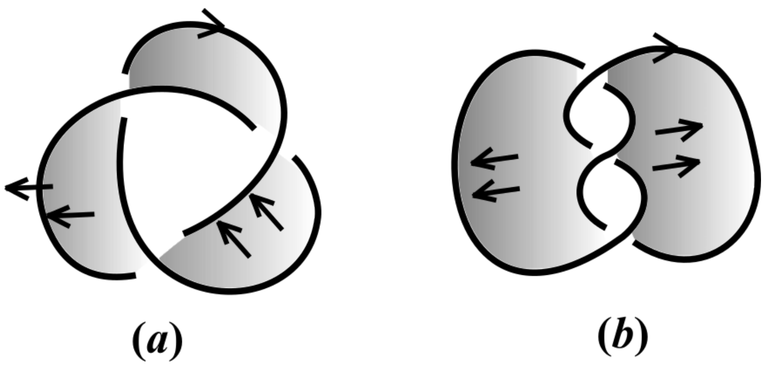
Bir düğümün Seifert yüzeyi tek değildir, birbirinden farklı birden fazla Seifert yüzeyi olabilir.

Örnek 4. Şekil 5'te çözük düğüm için bir Seifert yüzey verilmiştir. Bu örnekte verilen Seifert yüzey 2-disk D^2'dir.



Şekil 5: $\partial D^2 = U$, çözük düğümdür.

Örnek 5. Şekil 6(a)'da verilen yüzeyin sınırı trefoil düğümüdür, fakat bu yüzey yönlendirilemediği için trefoil düğümünün bir Seifert yüzeyi değildir. Şekil 6(b)'de verilen yüzey ise yönlendirilebilen ve sınırı trefoil olan bir yüzey olduğu için trefoil düğümünün bir Seifert yüzeyine örnektir.

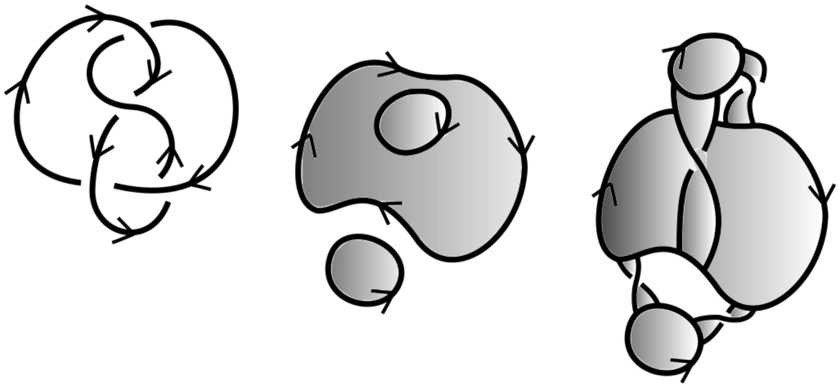


Şekil 6: (a) Yönlendirilemeyen ve sınırı trefoil olan bir yüzey, (b) trefoil düğümünün bir Seifert yüzeyi.

İspat 1. Seifert algoritmasını kullanarak verilen herhangi bir düğüm için Seifert yüzey inşa edilir. Seifert algoritmasının ayrıntılı anlaşılabilmesi için algoritma Sekiz düğümüne Şekil 7'de adım adım uygulanmıştır.

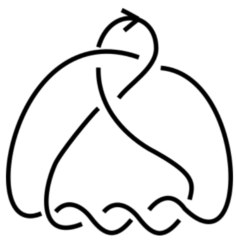
- Yönlü bir düğüm verilsin.
- Düğümün her bir çaprazlaması yönler tutarlı olacak şekilde çözülür.
- Çember kümeleri elde edilir. Bu çemberlere Seifert çemberleri denir.
- Seifert çemberlerinin her biri $\mathbb{R}^3$ uzayında bir diskin sınırıdır. Bu disklerin birbirlerini kesmeyecek biçimde farklı yüksekliklerde, uzayda durduğu varsayılabilir.
- Düğümün çaprazlamalarının olduğu yerlerde diskler birbirlerine çözülen çaprazlamalara uygun bir biçimde kıvrılmış şeritler ile bağlanır.

- Bu şekilde elde edilen yüzey yönlendirilebilen bir yüzeydir ve sınırı verilen yönlü K düğümüdür.



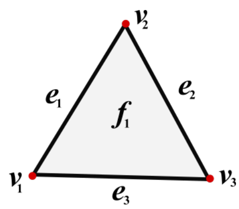
Şekil 7: Sekiz düğümü için Seifert algoritması.

Ödev 1. Aşağıdaki Şekil 8'de verilen 7_2 düğümü için Seifert algoritmasını kullanarak bir Seifert yüzey inşa ediniz.



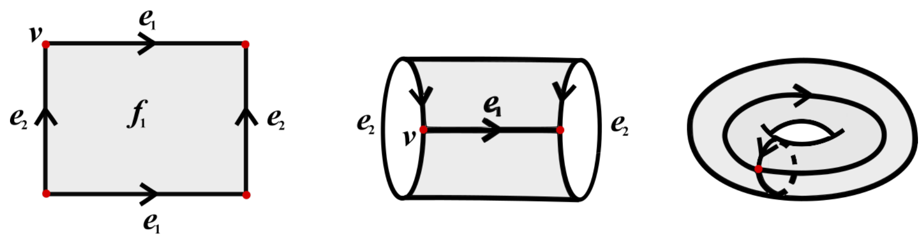
Şekil 8: 7_2 düğümü.

Yüzeyleri üçgenlerin birleşimi olarak düşünebiliriz. Buna ***üçgenleme*** (triangulation) denir. Şekil 9'da görüldüğü üzere bir üçgenin üç köşesi, üç kenarı ve bir yüzü vardır.



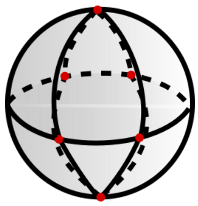
Şekil 9: Üçgenleme.

Örnek 6. Şekil 10'da torus yüzeyi T^2 için bir üçgenleme verilmiştir. Torus yüzeyi, aynı harfli kenarlar oklar üst üste gelecek şekilde yapıştırılarak elde edilir. Torus yüzeyi için 1 köşesi v, 2 kenarı e_1, e_2 ve 1 yüzü f_1 olan bir üçgenleme verilmiştir.



Şekil 10: Torus yüzeyi için verilen bir üçgenleme.

Örnek 7. Şekil 11'de küre yüzeyi S^2 için bir üçgenleme verilmiştir. Küre yüzeyi için 6 köşesi, 12 kenarı ve 8 yüzü olan bir üçgenleme verilmiştir.



Şekil 11: Küre yüzeyi için verilen bir üçgenleme.

Bir yüzey için verilen bir üçgenlemede toplam köşe sayısı V, toplam kenar sayısı E ve toplam yüz sayısı F ile gösterilsin. Yüzey için tanımlanan $\chi = V - E + F$ sayısına yüzeyin *Euler karakteristiği* denir ve yüzeyin üçgenlemesinden bağımsız bir değişkendir.

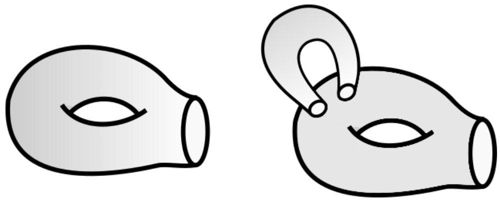
Tanım 3. Bir yüzeyin toplam delik sayısına yüzeyin *cinsi* denir ve g ile gösterilir.

Yönlü bir K düğümü ve sınırı olduğu bir Seifert yüzey Σ verilsin. Seifert yüzey Σ'nın cinsinin g olduğunu varsayalım. Örneğin, Şekil 12'de cinsi 1 olarak verilen ve sınırı K olan düğümü alalım. Seifert yüzey Σ'ya sınırdan uzakta olacak şekilde bir 1-kulp eklendiğinde yeni bir Seifert yüzey Σ' elde edilir ve elde edilen yeni Seifert yüzeyin cins sayısı $g + 1$ olur. Şekil 12'de torus yüzeyine 1-kulp eklenmiş ve K düğümü için cinsi 2 olan Seifert yüzey elde edilmiştir.

Sonuç 1.2. *Bir düğümün birden fazla Seifert yüzeyi olabilir. Seifert yüzey tek değildir.*

Tanım 4. Bir düğümün tüm Seifert yüzeylerinin cinsinin (delik sayılarının) en küçüğüne *düğümün cinsi* denir.

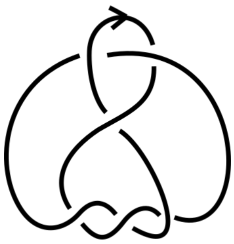
Cinsi $g = 0$ olan tek düğüm çözük düğümdür. Sekiz düğümünün cinsi $g = 1$'dir.



Şekil 12: Seifert yüzey tek değildir.

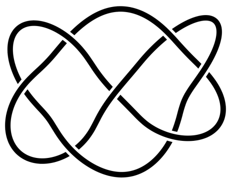
1.6 Alıştırmalar

1. Şekil 13'te verilen 6_2 düğümünün Seifert algoritmasını kullanarak bir Seifert yüzeyini inşa ediniz ve cinsi g'yi hesaplayınız.



Şekil 13: 6_2 düğümü.

2. Şekil 14'te verilen 7_4 düğümüne yön veriniz. Seifert algoritmasını kullanarak bir Seifert yüzeyini inşa ediniz ve inşa ettiğiniz yüzeyin Euler karakteristiğini hesaplayınız.



Şekil 14: 7_4 düğümü.

Kaynaklar

[1] A. Adams, **The knot book, an elementary introduction to the mathematical theory of knots**, American Mathematical Society.