1 Düğüm polinomları, klasik Alexander polinomu

Bu bölümde amaç herhangi bir düğümü bir polinom ile eşleştirmek öyle ki polinomu hesaplamak için düğümün hangi diyagramı kullanılırsa kullanılsın hep aynı polinomu bulmaktır. Bu durumda düğüm için tanımlanan polinom düğüm diyagramından bağımsız olacağı için düğüm için bir değişmez olur.

1.1 Klasik Alexander polinomu

K düğümü, n-çaprazlamaya sahip yönlü bir düğüm olsun. Her bir çaprazlamayı $1, 2, \ldots, n$'ye kadar numaralandıralım ve her bir yayı y_1, y_2, …, y_n'e kadar adlandıralım. r-çaprazlaması satır r'ye ve y_s-yayı da sütun s'ye denk gelecek şekilde $n \times n$ boyutundaki M matrisi aşağıda verilen kurallara göre oluşturulur.

Verilen bir K düğümünün r-çaprazlamasında;

- üstten geçen yay y_i,
- biten yay y_j
- başlayan yay y_k olsun.

i,j,k birbirinden farklı değerler için r-çaprazlaması pozitif ise,

$$M(r,i) = 1 - t \qquad M(r,j) = -1 \qquad M(r,k) = t$$

r-çaprazlaması negatif ise,

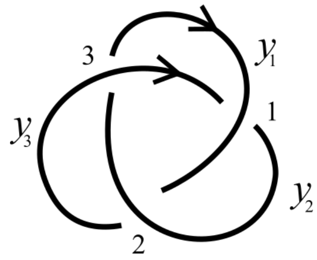
$$M(r,i) = 1 - t \qquad M(r,j) = t \qquad M(r,k) = -1$$

bunların dışında matrise 0 yazılır.

Tanım 1. *Alexander matris* A_K, M matrisinin n. satırı ve n. sütununu silerek elde edilen matristir.

Tanım 2. Yönlü bir K düğümünün *Alexander polinomu* $\Delta_K(t)$ Alexander matrisinin determinantıdır. Verilen iki Alexander polinomu k bir tam sayı olmak üzere $\pm t^k$ çarpımı ile birbirine eşit oluyorsa bu iki polinom birbirine denktir denir.

Örnek 1. Sağ trefoil düğümünün 3 çaprazlaması vardır ve her bir çaprazlaması Şekil 1'de verildiği gibi saat yönünde sırasıyla numaralandırılmış ve düğümün her bir yayı Şekil 1'de verildiği gibi y_1, y_2, y_3 olarak adlandırılmıştır. r-çaprazlaması satır r'ye ve y_s-yayı da sütun



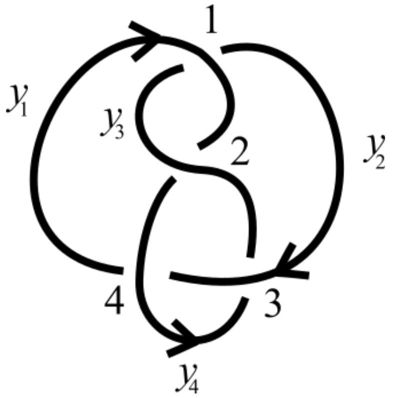
Şekil 1: Sağ trefoil düğümü.

s'ye denk gelecek şekilde 3×3 boyutundaki M matrisi yukarıda verilen kurallara göre

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -t & t-1 \\ t-1 & 1 & -t \\ -t & t-1 & 1 \end{pmatrix}$$

olur ve M matrisinin 3. satırı ve 3. sütünu silinerek Alexander matrisi $A_K = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t-1 & 1 \end{pmatrix}$ elde edilir. Sağ trefoil düğümünün Alexander polinomu ise $\Delta_K(t) = \mathtt{det}(A_K) = 1 - (-t)(t-1) = 1 - t + t^2$ olarak elde edilir. Bazı kitaplarda trefoil düğümünün Alexander polinomu $\Delta_K(t) = t^{-1} - 1 + t$ olarak verilir, bu polinom t^{-1} ile çarpıldığında $1 - t + t^2$ polinomu elde edildiğinden, iki polinom birbirine denktir.

Örnek 2. Sekiz düğümünün 4 çaprazlaması vardır ve her bir çaprazlaması Şekil 2'de verildiği gibi saat yönünde sırasıyla numaralandırılmış ve düğümün her bir yayı Şekil 2'de verildiği gibi y_1, y_2, y_3, y_4 olarak adlandırılmıştır. r-çaprazlaması satır r'ye ve y_s-yayı da sütun s'ye denk



Şekil 2: Sekiz düğümü.

gelecek şekilde 4×4 boyutundaki M matrisi yukarıda verilen kurallara göre

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -t & t-1 & 0 \\ t-1 & 0 & 1 & 1-t \\ 0 & t & -1 & 1-t \\ -1 & 1-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

olur ve M matrisinin 4. satırı ve 4. sütünu silinerek Alexander matrisi $A_K = \begin{pmatrix} 1 & -t & t-1 \\ t-1 & 0 & 1 \\ 0 & t & -1 \end{pmatrix}$ elde edilir. Sekiz düğümünün Alexander polinomu ise

$$\begin{aligned} \Delta_K(t) &= \mathtt{det}(A_K) \\ &= 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ t & -1 \end{vmatrix} - (-t)\begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (t-1)\begin{vmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t \end{vmatrix} \\ &= -t + t(-(t-1)) + (t-1)^2 t \\ &= -t - t^2 + t + t(t-1)^2 - t^2 + t^3 - 2t^2 + t \\ &= t - 3t^2 + t^3 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Kaynaklar

[1] Alexander, J.W. (1928). **Topological Invariants of Knots and Links**, Trans. Amer. Math. Soc. 30, 275–306.

[2] Murasugi K. (1996). Knot theory and its applications, Birkhauser Boston. (Sayfa: 105-108)

[3] http://www.cs.columbia.edu/ cs6204/files/Lec9b,10.pdf web adresi.