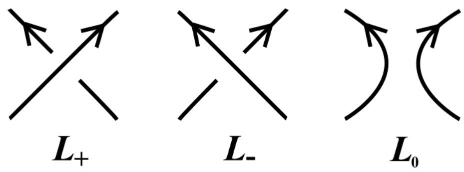
1 Düğüm Polinomları: Alexander-Conway Polinomu

1.1 Alexander-Conway polinomu

Yönlü bir düğüm ya da link diyagramı verilsin. Verilen düğümün ya da linkin bir çaprazlaması seçilir ve L_+, L_- ve L_0 olacak şekilde Şekil 1'e göre çözümlenir:



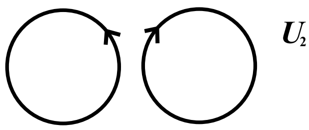
Şekil 1: Bir düğümün seçilen bir çaprazlamaya göre çözümlenmesi.

Bir L düğümünün ya da linkinin $\nabla_L(z)$ ile gösterilen *Alexander-Conway polinomu* aşağıdaki kurallara göre tanımlanır:

(1) $\nabla_U(z) = 1$, U çözük düğüm,

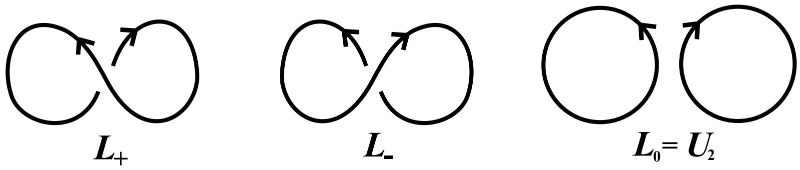
(2) $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$ Giriftlik ilişkisi (Skein relation).

Örnek 1. Şekil 2'de verilen iki bileşenli çözük link U_2'nin Alexander-Conway polinomunu hesaplayalım.



Şekil 2: Çözük link U_2.

Çözük link U_2 için Şekil 3'te seçilen çözümlemeye göre L_+ ve L_- çözük düğüm olurken $L_0 = U_2$ olur.



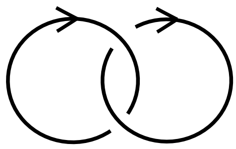
Şekil 3: Çözük link U_2'nin L_+, L_- ve L_0'a göre çözümlenmesi.

Giriftlik ilişkisi kullanılarak Alexander-Conway polinomu hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) &= z\nabla_{L_0}(z) \\
\nabla_U(z) - \nabla_U(z) &= z\nabla_{L_0}(z) \\
1 - 1 &= z\nabla_{U_2}(z).
\end{aligned}$$

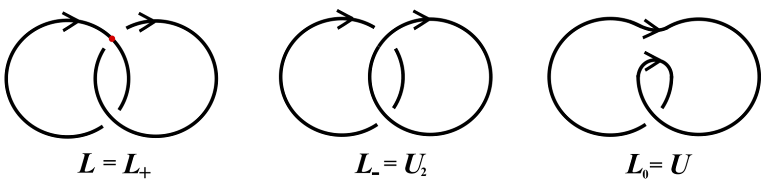
Eşitlik kullanılarak çözük link U_2'nin Alexander-Conway polinomu $\nabla_{U_2}(z) = 0$ olarak hesaplanır.

Örnek 2. Şekil 4'te verilen pozitif Hopf link'in Alexander-Conway polinomunu hesaplayalım.



Şekil 4: Pozitif Hopf link L.

Pozitif Hopf link için Şekil 5'te işaretlenen çaprazlamaya göre yapılan çözümlemesi sonucunda $L_+ = L$ ve $L_- = U_2$ olurken $L_0 = U$ çözük düğüm olur.

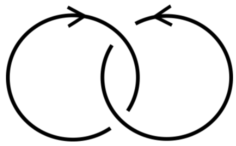


Şekil 5: Pozitif Hopf link L'nin işaretli çaprazlamaya göre çözümlenmesi.

Giriftlik ilişkisi ve yukarıdaki Örnek 1'de hesaplanan $\nabla_{U_2}(z) = 0$ kullanılarak pozitif Hopf linkin Alexander-Conway polinomu $\nabla_L(z) = z$ olarak hesaplanır:

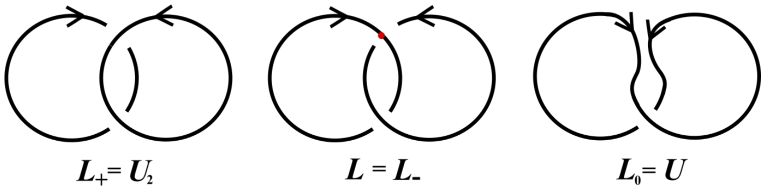
$$\begin{aligned}
\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) &= z\nabla_{L_0}(z) \\
\nabla_L(z) - \nabla_{U_2}(z) &= z\nabla_U(z) \\
\nabla_L(z) - 0 &= z\,.\,1 \\
\nabla_L(z) &= z.
\end{aligned}$$

Örnek 3. Şekil 6'da verilen negatif Hopf link'in Alexander-Conway polinomunu hesaplayalım.



Şekil 6: Negatif Hopf link L.

Negatif Hopf link için Şekil 7'de işaretlenen çaprazlamaya göre yapılan çözümlemesi sonucunda $L_+ = U_2$ ve $L_- = L$ olurken $L_0 = U$ çözük düğüm olur.

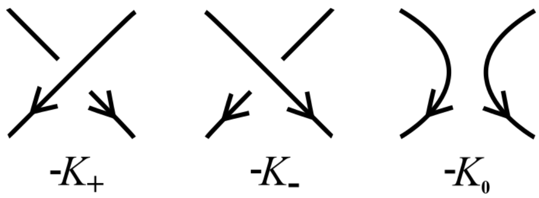


Şekil 7: Negatif Hopf link L'nin işaretli çaprazlamaya göre çözümlenmesi.

Giriftlik ilişkisi ve yukarıdaki Örnek 1'de hesaplanan $\nabla_{U_2}(z) = 0$ kullanılarak negatif Hopf linkin Alexander-Conway polinomu $\nabla_L(z) = -z$ olarak hesaplanır:

$$\begin{aligned} \nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) &= z\nabla_{L_0}(z) \\ \nabla_{U_2}(z) - \nabla_L(z) &= z\nabla_U(z) \\ 0 - \nabla_L(z) &= z \,.\, 1 \\ \nabla_L(z) &= -z. \end{aligned}$$

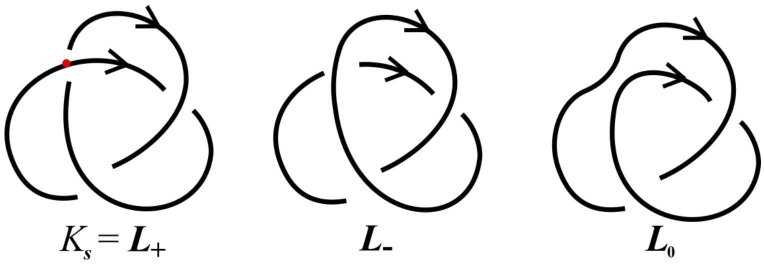
Örnek 2 ve Örnek 3'te görüldüğü üzere yön kavramı linklerin Alexander-Conway polinomunu hesaplamak için önemlidir. Diğer taraftan yön kavramı düğümlerin Alexander-Conway polinom hesabını etkilemez. $-K$, verilen yönlü K düğümünün ters yönlü olan düğümünü temsil etsin. Bu durumda $\nabla_K(z)$ ve $\nabla_{-K}(z)$ nasıl ilişkilidir?



Şekil 8: $-K$ düğümün seçilen bir çaprazlamaya göre çözümlenmesi.

Şekil 8'de görüldüğü üzere $\nabla_K(z) = \nabla_{-K}(z)$ olur.

Örnek 4. Şekil 9'da verilen sağ trefoil K_s düğümünün Alexander-Conway polinomunu hesaplayalım.

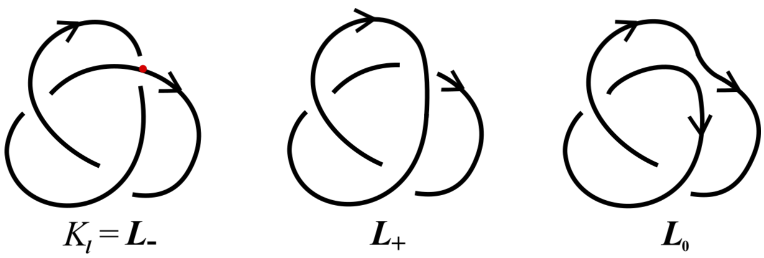


Şekil 9: Sağ trefoil K_s'nin işaretli çaprazlamaya göre çözümlenmesi.

Sağ teroil için Şekil 9'da işaretlenen çaprazlamaya göre yapılan çözümlemesi sonucunda $L_+ = K_s$ sağ trefoil, $L_- = U$ çözük düğüm ve L_0 ise pozitif Hopf link olur. $\nabla_{L_-}(z) = \nabla_U(z) = 1$'dir. Örnek 2'de hesaplanan pozitif Hopf linkin Alexander-Conway polinomu $\nabla_{L_0}(z) = z$'dir. Bu durumda, sağ trefoil düğümünün Alexander-Conway polinomu $\nabla_{K_s}(z) = 1 + z^2$ olarak hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) &= z\nabla_{L_0}(z) \\
\nabla_{K_s}(z) - \nabla_U(z) &= z\,.\,z \\
\nabla_{K_s}(z) - 1 &= z^2 \\
\nabla_{K_s}(z) &= 1 + z^2.
\end{aligned}$$

Örnek 5. Şekil 10'da verilen sol trefoil K_l düğümünün Alexander-Conway polinomunu hesaplayalım.



Şekil 10: Sol trefoil K_l'nin işaretli çaprazlamaya göre çözümlenmesi.

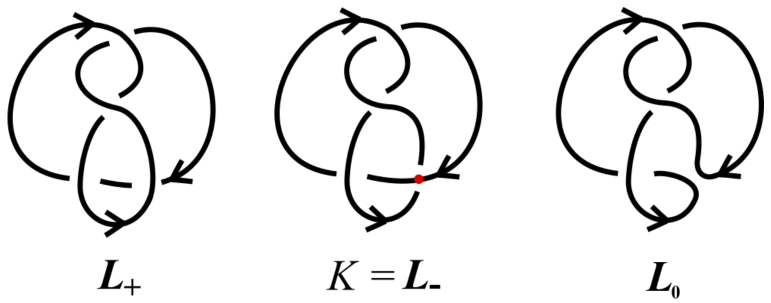
Sol trefoil için Şekil 10'da işaretlenen çaprazlamaya göre yapılan çözümlemesi sonucunda $L_+ = U$ çözük düğüm, $L_- = K_l$ sol trefoil ve L_0 ise negatif Hopf link olur. $\nabla_{L_+}(z) =$

$\nabla_U(z) = 1$'dir. Örnek 3'te hesaplanan negatif Hopf linkin Alexander-Conway polinomu $\nabla_{L_0}(z) = -z$'dir. Bu durumda, sol trefoil düğümünün Alexander-Conway polinomu $\nabla_{K_l}(z) = 1+z^2$ olarak hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) &= z\nabla_{L_0}(z) \\
\nabla_U(z) - \nabla_{K_l}(z) &= z\,.\,z \\
1 - \nabla_{K_l}(z) &= z^2 \\
\nabla_{K_l}(z) &= 1 + z^2.
\end{aligned}$$

Örnek 4 ve Örnek 5'te görüldüğü üzere sağ trefoil ve sol trefoil düğümlerinin Alexander-Conway polinomları eşit çıktığı için iki düğümün birbirinden farklı olduğunu Alexander-Conway polinomlarını kullanarak söyleyemeyiz.

Örnek 6. Şekil 11'de verilen K, Sekiz düğümünün Alexander-Conway polinomunu hesaplayalım.



Şekil 11: Sekiz K düğümünün işaretli çaprazlamaya göre çözümlenmesi.

Sekiz düğümünün Şekil 11'de işaretlenen çaprazlamaya göre yapılan çözümlemesi sonucunda $L_+ = U$ çözük düğüm, $L_- = K$ Sekiz düğümü ve L_0 ise pozitif Hopf link olur. $\nabla_{L_+}(z) = \nabla_U(z) = 1$ ve Örnek 2'de hesaplanan pozitif Hopf linkin Alexander-Conway polinomu $\nabla_{L_0}(z) = z$'dir. Bu durumda, Sekiz düğümünün Alexander-Conway polinomu $\nabla_K(z) = 1 - z^2$ olarak hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) &= z\nabla_{L_0}(z) \\
1 - \nabla_K(z) &= z\,.\,z \\
\nabla_K(z) &= 1 - z^2.
\end{aligned}$$

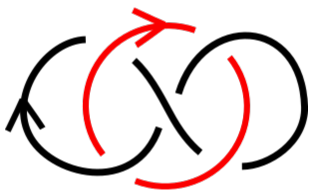
Örnek 6'da görüldüğü üzere Alexander-Conway polinomları farklı çıktığı için sağ trefoil ve sol trefoil düğümleri Sekiz düğümünden farklı düğümlerdir.

Not. Bir K düğümünün klasik Alexander polinomu $\Delta_K(t)$ ve Alexander-Conway polinomu $\nabla_K(z)$, verilen $\Delta_K(t) = \nabla_K(t^{1/2} - t^{-1/2})$ denklem eşitliği ile ilişkilidir. Örneğin, sağ trefoil düğümünün Örnek 4'te hesaplanan Alexander-Conway polinomu $\nabla_K(z) = z^2 + 1$'de z yerine $t^{1/2} - t^{-1/2}$ koyulursa

$$\begin{aligned}
\nabla_K(t^{1/2} - t^{-1/2}) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})^2 + 1 \\
&= t - 2 + t^{-1} + 1 \\
&= -t + t^{-1} - 1 \\
&= \Delta_K(t),
\end{aligned}$$

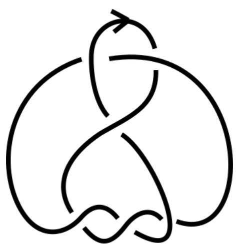
sağ trefoil düğümünün klasik Alexander polinomu elde edilir.

Ödev 1. Şekil 12'de verilen Whitehead linkin Alexander-Conway polinomunu hesaplayınız.



Şekil 12: Whitehead link.

Ödev 2. Şekil 13'te verilen 6_2 düğümünün Alexander-Conway polinomunu hesaplayınız.



Şekil 13: 6_2 düğümü.

Kaynaklar

[1] A. Adams, **The knot book, an elementary introduction to the mathematical theory of knots**, American Mathematical Society.

[2] Conway H. (1970). **An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties**, Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967 : J. Leech, ed.), Pergamon Press, New York, 329–358.

[3] Murasugi K. (1996). **Knot theory and its applications**, Birkhauser Boston.